

Геометрия, где парабола – это окружность.

(домашнее задание на 29 сентября 2009)

Рассмотрим два определяющих свойства евклидовых окружностей. Определяющее свойство евклидовой окружности – значит, этим свойством в евклидовой геометрии обладают все окружности и только они. Определяющих свойств у евклидовых окружностей очень много, но нам нужны пока что только два.

(О) Окружность – это геометрическое место точек, равноудалённых от некоторой точки.

(Ц) Окружность – это геометрическое место точек X таких, что ориентированный угол $\angle(AX, XB) = \varphi$, для некоторых фиксированных точек A и B и угла φ . (И с добавлением в окружность самих точек A и B .)

В геометрии Галилея свойства **О** и **Ц** определяют разные объекты. Свойство **О** – особые прямые, а свойство **Ц** – циклы. В связи с этим возникают следующие вопросы.

Вопрос 1. Нельзя ли придумать геометрию на плоскости, в которой бы свойство **О** определяло циклы (то есть параболы с вертикальной осью симметрии) ?

Вопрос 2. Нельзя ли придумать геометрию на плоскости, в которой бы циклы обладали и свойством **О**, и свойством **Ц**?

При построении новой геометрии можно придумывать всё, что угодно, задавать любые вопросы и пытаться на них ответить, требовать любые свойства от геометрических объектов и пытаться добиться, чтобы они выполнялись. Тем не менее, предлагается придерживаться следующего плана. Конечно, от этого плана можно отклоняться, главное – чтобы в итоге получилась какая-то осмысленная конструкция с интересными свойствами.

- 0)** Хорошо бы, чтобы это была геометрия на плоскости, инвариантная относительно параллельных переносов и с антисимметричным расстоянием. (То есть параллельные переносы должны быть движениями в этой геометрии, и расстояние $d(X, Y) = -d(Y, X)$ для любых двух точек X и Y .)
 - 1)** Определите, какая парабола есть ГМТ, удалённых от точки $(0, 0)$ на расстояние d . (Так же, как в свойстве **Ц**, здесь при необходимости можно добавить к ГМТ одну-две точки, или наоборот, что-нибудь убрать.)
 - 2)** Определите функцию расстояния $d(x_1, y_1, x_2, y_2)$, учитывая пункты (0) и (1) и собственные желания.
 - 3)** Найдите все (и докажите, что других нет) преобразования плоскости, сохраняющие ваше расстояние, объявите их движениями.
 - 4)** Верно ли, что при ваших движениях прямые переходят в прямые? Верно ли, что середина отрезка переходит в середину отрезка?
 - 5)** Как можно определить углы между прямыми, если мы хотим, чтобы они сохранялись при уже определённых движениях?
 - 6)** Какие фигуры определяет свойство **Ц**?
 - 7)** Что ещё хорошего и плохого есть в вашей геометрии?
-