

## Деление многочленов с остатком. Теорема Безу

- Выполните деление многочленов уголком. Ответ запишите в виде, аналогичном формуле деления с остатком для натуральных чисел.
  - $3x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x - 6$  на  $x^4 + 2x + 2$ ;
  - $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$  на  $x^2 - x + 1$ ;
  - $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 10x + 6$  на  $x - 3$ ;
  - $x^7 - 1$  на  $x^3 + x + 1$ .

- Пусть некоторый многочлен делится без остатка на двучлен  $x - 1543$ . Какое значение принимает этот многочлен при  $x = 1543$ ?
- Пусть некоторый многочлен при делении на двучлен  $x - 1543$  дает остаток 6. Какое значение принимает этот многочлен при  $x = 1543$ ?

*Теорема Безу.* Остаток от деления многочлена на двучлен  $x - a$  равен значению этого многочлена при  $x = a$ .

*Следствие.* Число  $a$  является корнем многочлена тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на  $x - a$  без остатка.

(Пусть правая часть уравнения равна нулю, а в левой записан многочлен. Корни такого уравнения называются **корнями многочлена** )

- Делится ли многочлен  $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x - 5$  без остатка на: а)  $x - 1$ ; б)  $x^2 - 3x + 2$ ?
- При каком значении  $k$  выполняется без остатка деление  $x^3 + 6x^2 + kx + 12$  на  $x + 4$ ?
- При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$  делится на многочлен  $x^2 - 3x + 2$ 
  - без остатка;
  - с остатком 3?
- Многочлен при делении на  $x$  дает остаток 4, а при делении на  $x - 1$  даёт остаток 2. Найдите остаток от деления этого многочлена на многочлен  $x(x - 1)$ .
- \* Придумайте многочлен, который при делении на  $x$  дает остаток 2, при делении на  $x - 1$  дает остаток 1, а при делении на  $x + 1$  даёт остаток 4.
- \* Докажите тождество:

$$(x - y)(xz + 1)(yz + 1) + (y - z)(yx + 1)(zx + 1) + (z - x)(zy + 1)(xy + 1) = (x - y)(y - z)(z - x).$$

*Предупреждение:* Можно честно и аккуратно раскрыть скобки, но я это читать не стану.

### И снова формулы сокращенного умножения!

- Разделится ли без остатка: а)  $x^n - 1$  на  $x - 1$ ; б)  $x^{2n+1} + 1$  на  $x + 1$ ; в)  $x^{2n} + 1$  на  $x + 1$ ? Выполните деление уголком (только там, где остатка не ожидается) и запомните полученные формулы.
- Разложите на множители: а)  $x^3 + x^2 + x - 3$ ; б)  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5$ ;
- в)  $x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x - 100$ .
- \* Докажите, что многочлен  $x^{29} + x^{28} + \dots + x + 1$  делится на многочлен  $x^9 + x^8 + \dots + x + 1$ .
- Разложите на множители  $a^n - b^n$  и  $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ . Запомните полученные формулы.

### Задачи для домашних заданий

- Найдите такие  $a$  и  $b$ , чтобы многочлен  $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$  делился на  $x^2 - 1$ .
- Найдите значение выражения  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{11}$ .
- Многочлен при делении на  $x + 1$  дает остаток 4, а при делении на  $x - 1$  даёт остаток 2. Найдите остаток от деления этого многочлена на  $x^2 - 1$ .
- Существует ли многочлен, который при делении на  $x^2$  дает остаток  $x + 1$ , при делении на  $x + 1$  дает остаток 8 и делится на  $x - 1$ ?