

Дробно-рациональные выражения

Упростите выражение:

1. а) $x^2 - 6x + 1 + \frac{1 + \frac{(x-5)(x-3)}{(1+5x)(1+3x)}}{\frac{x-3}{1+3x} - \frac{x-5}{1+5x}}$; б) $\frac{\frac{x^2+y^2}{x-y} - \frac{x^2-y^2}{x+y}}{\frac{x-y}{x^2+y^2} + \frac{x+y}{x^2-y^2}} \cdot \frac{y^2 - xy + x^2}{2xy}$; в) $\frac{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2c}{ab})(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{4c^2}{a^2b^2}}$.
2. а) $\left(\frac{5c^2 - c}{25c^2 - 10c + 1} + \frac{4}{1 - 25c^2}\right) : \left(1 - \frac{3}{5c-1}\right)$; б) $\frac{(a-b)^2 + ab}{(a+b)^2 - ab} : \frac{(a^5 + b^5 + a^2b^3 + a^3b^2)}{(a^3 + b^3 + a^2b + ab^2)(a^3 - b^3)}$.
3. $\left(\frac{1}{t^2 + 3t + 2} + \frac{2t}{t^2 + 4t + 3} + \frac{1}{t^2 + 5t + 6}\right)^2 \cdot \frac{(t-3)^2 + 12t}{2}$.
4. $\left((x-y) \cdot \left(x - \frac{x^2y - y^2}{x+y+xy}\right) : \left(x+y - \frac{xy}{x+y}\right) - \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^2 + x^2y + xy^2}\right) : \frac{x^3 + x^2y - x^2 - xy^2 - y^3 + y^2}{x + xy + y}$.
5. Выделите целую часть дробного выражения: а) $\frac{x^7 - 1}{x^3 + x + 1}$; б) $\frac{x^4 - 64}{x - 3}$.

Дополнительные задачи

- При каких значениях a и b многочлен $x^3 + 2x^2 - ax + 1$ делится на $x^2 + bx + 1$ без остатка?
- Существует ли число c , при котором: а) многочлен $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6$ делится без остатка на $x^2 + c$; б) многочлен $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ делится без остатка на $x^2 + x + c$?
- Представьте многочлен в виде произведения квадратных трехчленов с целыми коэффициентами: а) $x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x + 3$; б) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2$.
- Представьте многочлен в виде произведения квадратного и кубического многочленов с целыми коэффициентами: а) $x^5 - 2x^3 - x + 1$; б) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x + 3$.
- При каких натуральных n значение выражения $\left(\frac{3}{n!} + \frac{5}{(n+1)!}\right) : \left(\frac{7}{n!} - \frac{6n}{(n+1)!}\right)$ является целым числом?
- Пусть $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4}$. Вычислите $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2$
- Дано: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Докажите: а) $(a+b)(b+c)(a+c) = 0$; б) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^{2n+1} = \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}}$