Модуль

Определение и свойства модуля

1) $|xy| = |x| \cdot |y|$; 1а) $|x| = |-x|$; 1б) $|x_1 x_2 \ldots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n|$;
2) $|x| - |y| \le |x+y| \le |x| + |y|$; 2а) $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

1. Решите уравнения и неравенства:
   а) $|x-1| + |x^2-1| + |x^3-1| = 0$; г) $|3x-5| = 4$;
   б) $|3-5x| = 3-5x$; д) $|3x-5| < 4$;
   в) $|x^2-6x+5| = |x^2-5|$; е) $|3x-5| \ge 4$.
2. Решите неравенство: $|x+3| > a$.

Перебор случаев

3. Решите уравнение:
   а) $|5x+9| - 4x = 3x+1$; б) $|5-2x| + |x+7| - 3x = 6$; в) $2x - |x - |3x+8|| = 5+x$.
4. Решите неравенство: а) $|4-3x| < 2x$.
5. Постройте график функции: а) $y = |x| + x$; б) $y = |x-2| + |2x+4| - x - 1$.

Геометрический смысл модуля

$|x|$ - *это расстояние от* x *до нуля.*
$|x-a|$ - *это расстояние от* x *до* a.
Решите уравнения и неравенства:

6. а) $|x-5| = |x+7|$; 7. а) $|x-4| + |x-6| = 10$;
   б) $|x-5| < |x+7|$; б) $|x-4| + |x-6| > 10$.
   в) $\left|\frac{x-5}{x+7}\right| > 1$.
8. а) $|x-4| - |x+6| = 10$; б) $|x-4| - |x+6| = 2$; в) $|x-4| - |x+6| = 12$.
9. а) $|x-4| - |x+6| \le 10$; б) $|x-4| - |x+6| \le 2$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения и неравенства:
10. а) $|2x-1| = 1-2x$; б) $|5x+2| \le 8$; в) $2 \le |4-x| < 7$.
11. а) $|x-3| - |2x+7| > 4x$; б) $|1-x| + |4x+2| - |3x-5| = 2$.
12. а) $|x - ||2x-1| - 3|| = 5$; б)* $|x - |x - |x - |x-2||| = 2$.
13. Постройте график функции: а) $y = |2-x| - |2+x|$; б) $y = \frac{x^2-1}{|x-1|}$.
14. При каких значениях параметра:
    а) из неравенства $|x-4| < a$ следует неравенство $(x+2)(x-12) < 0$;
    б) из неравенства $(x+2)(x-12) < 0$ следует неравенство $|x-4| < a$;
    в) из неравенства $x + 2a \ge 1$ следует неравенство $3 < |x-3| < 5$?

15*. Докажите неравенство: $|x| + |y| + |z| \le |x+y-z| + |x-y+z| + |-x+y+z|$.

16*. Докажите, что если $a+b+c+d > 0$, $a > c$, $b > d$, то $|a+b| > |c+d|$.

17*. Решите уравнение: $|x-2| + |x-1| + |x| + |x+1| + |x+2| = 6$

18**. Найдите максимально возможное значение выражения $|\ldots||x_1 - x_2| - x_3| - \ldots - x_{10}|$, где x_1, x_2, …,x_{10} — различные натуральные числа от 1 до 10.

Домашнее задание

19. Решите уравнения:
а) $|x^2+3x| = |x^2+x+2|$; б) $|x| - 2|x+3| = 2x$; в) $||3-x| - x + 1| + x = 6$.
20. Постройте график функции $y = |x-4| + 2x - 2$.
21. Используя геометрический смысл модуля, решите уравнения и неравенства:
    а) $|x+2| \ge |x+9|$; г) $|x-4| - |x-9| = 6$;
    б) $|x-5| + |x+7| = 12$; д) $|x-4| - |x-9| > 4$;
    в) $|x-5| + |x+7| = 20$; е) $|1 - |2x-4|| = 6$.