

Элементарное исследование дробно-рациональной функции

АСИМПТОТЫ

1. Напишите уравнения асимптот дробно-линейной функции $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Если $y \rightarrow +\infty$ или $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow a$ (хотя бы с одной стороны), то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$. Чтобы найти вертикальные асимптоты, надо изучить поведение функции в точках разрыва (в нулях знаменателя).

2. Найдите вертикальные асимптоты функций:

а) $y = \frac{x^2 - 2x}{(x+1)(x+2)}$; б) $y = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)(x+2)}$; в) $y = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)(x+2)^2}$.

Если $y \rightarrow b$ при $x \rightarrow +\infty$ и/или при $x \rightarrow -\infty$, то прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$. Для изучения поведения функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ можно поделить числитель и знаменатель на наибольшую степень x .

3. Найдите горизонтальные асимптоты функций:

а) $y = \frac{x+2}{x^2+2}$; б) $y = \frac{x^2-3x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; в) $y = \frac{x^2-x-2}{2x^2+3x+2}$.

4. Есть ли горизонтальная асимптота у функции $y = \frac{4x^3 - 2x - 5}{2x^2 + 16}$?

Если степень числителя на 1 превышает степень знаменателя, то у графика имеется наклонная асимптота. Прямая $y = ax + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Найти ее проще всего делением уголком.

5. Напишите уравнения наклонных асимптот (если они есть) функций:

а) $y = \frac{4x^3 - 2x - 5}{2x^2 + 16}$; б) $y = \frac{3x^3 - 2x + 2}{5x - 4}$.

План исследования функции

- 1) Найти $D(f)$.
 - 2) Найти $E(f)$ и предполагаемые(!) экстремумы.
 - 3) Проверить, является ли функция четной или нечетной.
 - 4) Найти нули функции.
 - 5) Определить интервалы знакопостоянства.
 - 6) Найти асимптоты.
 - 7) Определить области расположения графика (удобно их слегка заштриховать).
 - 8) Нарисовать "хвостики" вблизи асимптот.
 - 9) Построить график функции (можно использовать контрольные точки).
 - 10) Указать экстремумы и промежутки монотонности.
6. Исследуйте в соответствии с приведенным планом дробно-квадратичную функцию и постройте ее график:

а) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$; в) $y = \frac{9(x-1)^2}{x(x-6)}$; д) $y = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$; ж) $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$;
 б) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; г) $y = \frac{2x^2 + 3x}{x+1}$; е) $y = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 4}$; з) $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$.

7. Докажите, что график функции $y = \frac{k}{ax^2 + bx + c}$, где $a \neq 0$ имеет ось симметрии.

8. Найдите наибольшее и наименьшее (если они есть) значение функции и определите, при каких x они принимаются.

а) $y = \sqrt{2x+1} - x$; б) $y = \frac{1}{|x^2 + \sqrt{x+2}|}$; в) $y = |x-1| - \sqrt{x+2}$
 г) $y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.