Векторы-1

Направленный отрезок. Определение вектора

Определение. *Отрезок с указанным порядком концов называется* ***направленным отрезком****.*

Каждый направленный отрезок характеризуется длиной (или численным значением), направлением и начальной точкой.

Определение. *Множество сонаправленных друг другу лучей называется* ***направлением****.*

Приведите примеры физических величин, для которых существенны все три характеристики, только численное значение (в соответствующих единицах), численное значение и направление.

Примеры физических величин	Чем характеризуются	Какими математическими понятиями описываются	Геометрический смысл
	Численное значение (модуль).	Числа (скаляры)	Точка на координатной прямой
	Численное значение, направление, точка приложения.		
	Модуль, направление		

Определение. ***Направленные отрезки*** *называются* ***равными****, если у них одинаковые длина и направление.*

Определение(*). *~~Множество равных друг другу направленных отрезков называется~~* ***~~вектором.~~***

В физике (и некоторых учебниках геометрии) иногда называют вектором отдельно взятый направленный отрезок. Если говорить совсем аккуратно, то направленный отрезок - это приложенный вектор, а множество равных друг другу направленных отрезков – свободный вектор.

Заметим, что каждому вектору $\overrightarrow{AB}$ соответствует параллельный перенос $T_{\overrightarrow{AB}}$. Поэтому вектору можно дать и другое определение (**), эквивалентное определению (*):

Определение (**). ***Вектор*** *– это параллельный перенос.*

Если вектор $\vec{a}$ изображается направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, то говорят о векторе $\overrightarrow{AB}$. (наконец-то запись $T_{\overrightarrow{AB}}$ приобрела ясный смысл!)

Определение. ***Длиной вектора*** $\overrightarrow{AB}$ *называется длина отрезка AB, а* ***направлением*** *– направление луча AB.*

Если направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны (т.е. относятся к одному и тому же вектору), то для удобства говорят (не вполне аккуратно) о равенстве векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$

Теорема. *Если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *то* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Определение. *Если лучи AB и CD сонаправлены (противоположно направлены), то и векторы* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$ *называются сонаправленными (противоположно направленными). Сонаправленные и противоположно направленные векторы называются* ***коллинеарными****.*

Определяется также ***нулевой вектор*** $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$. Его длина равна нулю, а направления у него нет. По определению нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Задачи

1. а) Верно ли, что если два вектора сонаправлены третьему, то они сонаправлены друг другу? б) Верно ли, что если два вектора коллинеарны третьему, то они коллинеарны друг другу?
2. A, B, C, D – вершины параллелограмма, O – точка пересечения его диагоналей. Рассмотрим всевозможные направленные отрезки, задаваемые точками A, B, C, D, O, и соответствующие векторы. Укажите какую-нибудь пару:
   а) равных векторов; б) сонаправленных неравных векторов; в) противоположно направленных векторов.
   г) перечислите все различные векторы, коллинеарные $\overrightarrow{AO}$;
   д) сколько всего векторов задается указанными точками?
3. Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 расположены на равных расстояниях в указанном порядке на одной прямой. Сколько они задают векторов:

а) сонаправленных вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$ (включая сам вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$);

б) коллинеарных вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$ (включая сам вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$)?

Сложение и вычитание векторов

Определение. ***Суммой*** *двух* ***векторов*** *называется вектор, полученный по правилу треугольника:* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Теорема. *Результат сложения векторов не зависит от выбора точки А.*

Векторы можно складывать также по *правилу параллелограмма*.

Свойства сложения векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(коммутативность)*
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *(ассоциативность)*
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ *(закон поглощения нулевого вектора)*
4. $\forall\,\vec{a}\ \exists(-\vec{a}):\ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ *(существование противоположного вектора)*

Определение. ***Разностью векторов*** $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется такой вектор* $\vec{c}$*, что* $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Теорема. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Из этой теоремы и правила треугольника следует, что $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Теорема. $\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

Задачи.

1. Может ли выполняться равенство $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$ при $\vec{b}\ne\vec{0}$?
2. Упростите выражение
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}$;   в) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$.
б) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})$;

Домашнее задание

3. Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.
4. ABCD и A_1BC_1D – параллелограммы. Докажите, что $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{C_1C}$.
5. Докажите, что четырехугольник ABCD есть параллелограмм (возможно, вырожденный) тогда и только тогда, когда для любой точки O верно $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
6. Сколько различных векторов задают упорядоченные пары точек, составленные
а) из вершин треугольника ABC;
б) из вершин правильного шестиугольника ABCDEF и его центра O;
в) из вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

   В пункте а) просто перечислите все векторы, а в пуктах б) и в) опишите способ подсчета.
7. Клетки доски 2009×2009 раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета так, что угловые клетки черные. Для каждой пары разноцветных клеток рисуется вектор, идущий из центра черной клетки в центр белой. Докажите, что сумма нарисованных векторов равна 0.

Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия – 2 4 сентября 2009г.

Векторы-2

Умножение вектора на число.

Определение. ***Произведением числа*** *k* ***и ненулевого вектора*** $\vec{a}$ *называется вектор* $k\vec{a}$*, длина которого равна* $|k|\cdot|\vec{a}|$*, причем* $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$ *при* $k>0$ *и* $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ *при* $k<0$. $k\vec{a}=\vec{0}$ *при* $k=0$ *или* $\vec{a}=\vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число.

1. $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ *(однородность)*
2. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ *(дистрибутивность относительно чисел)*
3. $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ *(дистрибутивность относительно векторов)*

Теорема. *Вектор* $\vec{a}$ *коллинеарен ненулевому вектору* $\vec{b}$ *тогда и только тогда, когда найдется такое число k, что* $\vec{a}=k\vec{b}$.

Задачи.

1. а) M – середина отрезка AB. Докажите, что $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, где O – произвольная точка.

   б) Пусть для некоторой точки O выполняется условие $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$. Докажите, что M – середина отрезка AB.
2. Докажите с помощью векторов, что медиана AM треугольника ABC меньше полусуммы сторон AB и AC.
3. Пусть точка M – середина отрезка AB, точка K – середина отрезка CD. Представьте вектор $\overrightarrow{MK}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.
4. Докажите с помощью векторов свойства средних линий треугольника и трапеции.
5. Пусть ABCD – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей. Докажите, что для произвольной точки X выполняется равенство: $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}=4\overrightarrow{XO}$.
6. Докажите, что в произвольном четырехугольнике отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий и делится ею пополам.
7. а) Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы треугольника ABC. Найдите $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}$.

   б) Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.
8. Докажите, что точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC тогда и только тогда, когда:

   а) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$;

   б) для любой точки плоскости O верно равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.
9. Пусть M и M_1 – точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}\right)$.
10. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q, R такие, что AP : PB = BQ : QC = CR : RA. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR совпадают.

Домашнее задание

11. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AA_1. Докажите, что $\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{C_1B}$.
12. Докажите, что для любых точек A, B, C, D выполняется равенство $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{BD_1}+\overrightarrow{CA_1}+\overrightarrow{DB_1}$
13. Пусть O и O_1 – точки пересечения диагоналей параллелограммов ABCD и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что $\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{DD_1}\right)$.
14. M и N – середины сторон AD и BC произвольного четырехугольника ABCD. Докажите, что MN не превосходит полусуммы AB и CD. В каком случае достигается равенство?
15. M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка. Докажите, что

    OM < 1/3 (OA + OB + OC).