

Векторы-3

1. Пусть S – точка пересечения средних линий четырехугольника ABCD. Докажите, что для произвольной точки Q выполняется равенство $\overrightarrow{QS} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD})$.
2. M – точка пересечения медиан треугольника ABC, O – произвольная точка. Докажите, что $OM < \frac{1}{3} (OA + OB + OC)$.
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ненулевые неколлинеарные векторы. Найдите их сумму, если $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$, $(\vec{b} + \vec{c}) \parallel \vec{a}$.

Задача на 5

4. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q, R такие, что $AP : PB = BQ : QC = CR : RA$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR совпадают.

Разложение вектора по базису

Теорема о разложении по базису. Любые неколлинеарные векторы \vec{a} и \vec{b} образуют базис, т. е. для каждого вектора \vec{c} найдутся такие числа x и y , что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

5. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O. Разложите вектор \overrightarrow{AO} по базису \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .
6. Точки D и E делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношениях $AD : DB = 5 : 2$, $BE : EC = 4 : 1$. Разложите вектор \overrightarrow{DE} по базису $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
7. Пусть ABCD – параллелограмм, P – середина стороны AD, точка K делит сторону BC в отношении $BK : KC = 1 : 4$, точка M делит сторону CD в отношении $CM : MD = 3 : 2$.
 - а) Разложите по векторам \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} векторы \overrightarrow{PM} и \overrightarrow{PK} .
 - б) Разложите по векторам \overrightarrow{PM} и \overrightarrow{PK} векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$, и \overrightarrow{BD} .
8. На стороне AB треугольника ABC взята точка X. Разложите вектор \overrightarrow{CX} по базису \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} , если $AX : XB = 2 : 3$.

Теорема. Пусть точка X делит отрезок AB в отношении $AX : XB = m : n$. Тогда для любой точки O выполняется равенство

$$O\overrightarrow{X} = \frac{n}{m+n} O\overrightarrow{A} + \frac{m}{m+n} O\overrightarrow{B}.$$

Домашнее задание

9. На сторонах AB и CD четырехугольника ABCD взяты соответственно точки M и N, причем $AM : MB = DN : NC = m : n$. Разложите вектор \overrightarrow{MN} по базису \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{BC} .
10. Точка K делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AK : KC = 2:3$, точка M делит отрезок BK в отношении $BM : MK = 4:1$.
 - а) Разложите вектор \overrightarrow{CM} по базису \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .
 - б) Разложите вектор \overrightarrow{AB} по базису \overrightarrow{MC} и \overrightarrow{AK} .
 - в) Разложите вектор \overrightarrow{MB} по базису \overrightarrow{MA} и \overrightarrow{MC} .
11. Дан параллелограмм ABCD. Разложите векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AD} по базису $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$.
12. В правильном шестиугольнике ABCDEF разложите по базису $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AF} = \vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FD}$ и \overrightarrow{BM} , где точка M – середина стороны EF.
13. Даны два параллелограмма OABC и $OA_1B_1C_1$. Докажите, что каждый из трех отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не больше суммы двух других.

Векторы-4**Самостоятельная работка**

1. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D, на стороне AC – точка E. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O, причем $BO : OE = 2 : 3$, $AO : OD = 4 : 1$. Разложите вектор \overrightarrow{AD} по векторам \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AE} .

Применение векторов к решению задач.

Теорема. Пусть точки A, B и O не лежат на одной прямой. Тогда точка M принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, причем $\alpha + \beta = 1$. При этом при положительных α и β точка M лежит между A и B.

2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D, на стороне AC – точка E. Отрезки AD и BE пересекаются в точке O, причем $BO : OE = 2 : 3$, $AO : OD = 4 : 1$. Найдите отношения, в которых точки D и E делят соответствующие стороны треугольника.
3. На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что $BM = 2 \cdot CM$. Точки K и L выбраны на сторонах соответственно AC и AB так, что $AK = 2 \cdot CK$, $BL = 3 \cdot AL$. В каком отношении отрезки KL и AM делятся их точкой пересечения?

Домашнее задание

4. На сторонах BC и CD параллелограмма ABCD заданы соответственно середины M и K. Прямые DM и AK пересекаются в точке O. Вычислите отношения $DO:OM$ и $AO:OK$.
5. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника ABCDEF взяты такие точки M и N соответственно что $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ .
6. Точки M, N, K, L – середины соответственно сторон AB, BC, CD и DE пятиугольника ABCDE. P и Q – середины отрезков MK и NL. Докажите, что отрезки PQ и AE параллельны и найдите отношение их длин.
7. В параллелограмме ABCD O – точка пересечения диагоналей, M – середина отрезка OD, K – такая точка на стороне BC, что $BK = 2 \cdot KC$. Разложите по базису $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ векторы $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BM}$ и \overrightarrow{OK} . Разложите по базису $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ и \overrightarrow{OK} .
8. Точка N делит сторону AB треугольника ABC в отношении $AN : NB = 5 : 2$, точка K взята на продолжении этой же стороны, причем $AK : BK = 1 : 3$. M – середина стороны BC. Определите с помощью векторов, в каком отношении делятся отрезки CN и MK их точкой пересечения.

Векторы-5

1. Основание AD трапеции ABCD втрое больше основания BC. M – середина боковой стороны AB, точка N делит сторону CD в отношении $CN : ND = 1 : 3$, точка K принадлежит отрезку MN, причем $3MK = 2KN$. Определите с помощью векторов, в каком отношении прямая BK делит сторону AB.
2. Точки M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника ABCD, точка K – середина отрезка MN, O – точка пересечения медиан треугольника BCD. а) Докажите, что точки A, K и O лежат на одной прямой; б) Найдите, в каком отношении точка K делит отрезок AO.

Домашнее задание

3. Точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1 , точка B_2 лежит между точками A_2 и C_2 , причем $A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2$. Отрезки A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 разделены точками A, B и C в равных отношениях. Докажите с помощью векторов, что эти точки принадлежат одной прямой.
4. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AA_1 . Докажите, что $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{C_1B}$.
5. На стороне AB параллелограмма ABCD отмечена точка K так, что $2AK = 3KB$. Точка P симметрична точке A относительно центра D. Точка E делит сторону BC в отношении $BE : EC = 3 : 1$. Определите с помощью векторов, в каком отношении отрезки KP и ED делятся точкой их пересечения.
6. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O. Точка B_1 – середина стороны AC. На стороне AB взяты такие точки X и Y, что $AX = XY = YB$. а) Разложите по базису $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ векторы $\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{OY}$ и \overrightarrow{XC} . б) Разложите по базису $\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{XC}$ векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$.
7. Докажите, что сумма векторов, направленных из центра правильного n-угольника в его вершины, равна нулю.