

Подобие и гомотетия.

Определение. Преобразование плоскости называется **преобразованием подобия** с коэффициентом k , если оно изменяет все расстояния в k раз. Иными словами, если X и Y – произвольные точки, а X_1 и Y_1 – их образы, то $X_1Y_1 = kXY$. В частности, движения являются преобразованиями подобия с коэффициентом 1.

Определение. **Гомотетией** с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, при котором каждая точка X переходит в такую точку X_1 , что $\overline{OX_1} = k\overline{OX}$.

Свойства гомотетии.

1. При гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k . Иными словами, если X и Y – произвольные точки, а X_1 и Y_1 – их образы, то $\overline{X_1Y_1} = k\overline{XY}$.
2. Гомотетия является преобразованием подобия.
3. Гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую.

Свойства преобразований подобия.

1. Преобразования подобия сохраняют отношение «лежать между».
2. Преобразования подобия переводят отрезки в отрезки, лучи – в лучи, прямые – в прямые, окружности – в окружности.
3. Преобразования подобия сохраняют величины углов.

Теорема. Любое преобразование подобия может быть представлено как результат последовательного выполнения гомотетии и движения.

Определение. Фигуры называются **подобными**, если существует преобразование подобия, переводящее одну из них в другую.

Свойства подобных треугольников. Если $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, то 1) $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$;

$$2) \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k; \quad 3) \frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k; \quad 4) \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2.$$

Признаки подобия треугольников.

- 1) Если $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, то $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.
- 2) Если $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$, $\angle B_1 = \angle B$, то $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.
- 3) Если $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$, то $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Леммы о башенке и бантике с точки зрения подобия

Лемма о башенке Прямая, параллельная стороне данного треугольника и пересекающая две другие его стороны, образует с этими сторонами треугольник, подобный данному.

Лемма о бантике Пусть диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Тогда треугольники AOD и COB подобны.

1. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями a и b проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.
2. Основание треугольника равно 20. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.
3. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 16 и 9 соответственно. На продолжении стороны BC взята точка M такая, что $CM = 3,2$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?
4. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной m и n , считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.

Домашнее задание

5. Являются ли подобными два прямоугольника: картина в рамке и картина без рамки, если ширина рамки всюду одинакова?
6. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K . Прямая AK пересекает прямые BC и CD в точках L и M . Докажите, что $AK^2 = LK \cdot KM$.
7. В треугольник ABC вписан квадрат так, что одна сторона квадрата лежит на стороне BC , а две оставшиеся вершины квадрата – на сторонах AB и AC . Найдите сторону квадрата, если сторона $BC = a$, а высота $AH = h$.
8. Основания трапеции равны a и b . Параллельная им прямая делит трапецию на две равновеликие части. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции.
9. Точки S и R делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношениях $AS : SB = 3 : 1$, $BR : RC = 1 : 2$. M – середина отрезка AR . Определите с помощью векторов, в каком отношении прямая SM делит сторону AC ?