

Подобие и теорема Менелая

1. Точки М и N лежат соответственно на сторонах АВ и AD параллелограмма ABCD, причем $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке К. Найдите отношения $DK : KM$, $CK : KN$.
2. Точки D, E, F на сторонах АВ, АС и ВС треугольника ABC таковы, что, $CE : EA = 3 : 2$, $3BD = 2DA$, и прямая DE делит отрезок AF в точке O пополам. Найдите отношения $DO : OE$ и $BF : FC$.
3. Докажите **теорему Ван Обеля**: Пусть чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Тогда $\frac{BO}{OB_1} = \frac{BC_1}{C_1A} + \frac{BA_1}{A_1C}$.
4. Докажите **теорему Дезарга**: Пусть прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 лежат на одной прямой. Указание: примените теорему Менелая к треугольникам OAB, OAC и OBC, а затем перемножьте полученные равенства.
5. В окружности проведены два радиуса. Постройте хорду, делящуюся ими на три равные части.
6. В равнобедренной трапеции с основаниями 1 и 4 расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Найдите площадь трапеции.

Домашнее задание

7. На сторонах АВ и ВС треугольника ABC отмечены точки соответственно D и E так, что $DE \parallel AC$. Точка К делит сторону BC в отношении $BK : KC = 1 : 5$. Отрезки АК и DE пересекаются в точке O, причем $DO : OE = 1 : 2$. Найдите $BE : EC$ и $AO : OK$.
8. На стороне АВ квадрата ABCD взята точка E, а на стороне CD — точка F, причём $AE : EB = 1 : 2$, а $CF = FD$. Диагональ AC пересекается с отрезком DE в точке M, а с отрезком BF в точке N. Докажите, что треугольники AEM и CFN подобны.
9. Точки A_1 и C_1 расположены на сторонах соответственно BC и AB треугольника ABC, BB_1 — медиана. Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ABC и C_1BA_1 подобны.
10. Докажите, что середина отрезка АН (Н – ортоцентр) делит пополам дугу окружности девяти точек треугольника ABC, заключенную между основаниями высот ВУ и CZ.
11. Прямая l пересекает стороны АВ и AD параллелограмма ABCD в точках E и F соответственно. Пусть G – точка пересечения прямой l с диагональю AC. Докажите, что $AB/AE + AD/AF = AC/AG$.