Программа зачета по темам «Векторы» и «Подобие»

1. Определение вектора. (сонаправленные лучи, направление, направленный отрезок, вектор, коллинеарность векторов)
2. Сложение и вычитание векторов. (свойства с доказательствами)
3. Умножение вектора на число. (свойства с доказательствами)
4. Теоремы о коллинеарных векторах и о разложению по базису
5. Избранные векторные равенства (помнить сами равенства, уметь доказывать, понимать, верно ли обратное):

   а) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$, где M – середина отрезка AB;

   б) Пусть точка M – середина отрезка AB, точка K – середина отрезка CD. Представьте вектор $\overrightarrow{MK}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

   в) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, где M – центр масс треугольника ABC.

   г) $\overrightarrow{OX}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, если точка X делит отрезок AB в отношении AX : XB = *m : n.*
6. Пусть точки A, B и O не лежат на одной прямой. Тогда точка M принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$, причем $\alpha+\beta=1$. При этом при положительных α и β точка M лежит между A и B.
7. Доказательство геометрических неравенств с помощью векторов:
   а) M и N – середины сторон AD и BC произвольного четырехугольника ABCD. Докажите, что MN не превосходит полусуммы AB и CD. В каком случае достигается равенство?
   б) Пусть O и O_1 – точки пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $OO_1 \le 1/3(AA_1+BB_1+CC_1)$. В каком случае достигается равенство?
8. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q, R такие, что AP : PB = BQ : QC = CR : RA. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR совпадают.
9. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.
10. Точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1, точка B_2 лежит между точками A_2 и C_2, причем $A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2$. Отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 разделены точками A, B и C в равных отношениях. Докажите с помощью векторов, что эти точки принадлежат одной прямой.
11. Докажите, что сумма векторов, направленных из центра правильного *n*-угольника в его вершины, равна нулю.
12. Вычисление отношение с помощью векторов. Примеры задач:
   а) На стороне BC треугольника ABC взята точка M так, что BM = 2·CM. Точки K и L выбраны на сторонах соответственно AC и AB так, что AK = 2·CK, BL = 3·AL. В каком отношении отрезки KL и AM делятся их точкой пересечения?
   б) На стороне AB параллелограмма ABCD отмечена точка K так, что 2AK = 3KB. Точка P симметрична точке A относительно центра D. Точка E делит сторону BC в отношении BE : EC = 3 : 1. Определите с помощью векторов, в каком отношении отрезки KP и ED делятся точкой их пересечения.
13. Преобразования подобия. Гомотетия. Признаки подобия треугольников.
14. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точки касания делят каждую боковую сторону на отрезки длиной *m* и *n*, считая от вершины. К окружности проведены три касательные, параллельные каждой из сторон треугольника. Найдите длины отрезков касательных, заключенных между сторонами треугольника.
15. В треугольник ABC вписан квадрат так, что одна сторона квадрата лежит на стороне BC, а две оставшиеся вершины квадрата – на сторонах AB и AC. Найдите сторону квадрата, если сторона BC = *a*, а высота AH = *h*.
16. Основания трапеции равны *a* и *b*. Параллельная им прямая делит трапецию на две равновеликие части. Найдите отрезок этой прямой, заключенный внутри трапеции.
17. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC и найдите коэффициент подобия.
18. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что
   $S_{ABC} = qR$, где *R* – радиус описанной окружности треугольника ABC, а *q* – полупериметр его ортотреугольника $A_1B_1C_1$.
19. На каждом из оснований *AD* и *BC* трапеции *ABCD* построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
20. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, отсекает от него треугольник MNC. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и MNC, касаются.
21. Прямая Эйлера. Докажите, что середина отрезка OH (где O – центр описанной окружности, а H – ортоцентр треугольника ABC) является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, где A_1, B_1, C_1 –середины сторон треугольника ABC.
22. Окружность девяти точек.
23. Теорема Менелая.
24. Теорема Ван Обеля
25. Теорема Дезарга
26. Доказательство теорем о произведении отрезков пересекающихся хорд, об отрезках секущих и о квадрате касательной с помощью подобия.
27. Две окружности пересекаются в точках A и B. Проведены хорды AC и AD, причем хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если CB=*a*, BD=*b*.
28. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC =4, AK =6.
29. Формула длины биссектрисы треугольника.
30. Теорема Птолемея.
31. Теорема о бабочке.
32. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.
33. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки пересечения диагоналей трапеции к этим окружностям, равны между собой.
34. Три окружности попарно касаются в трех различных точках. Докажите, что их общие касательные, проходящие через эти точки, пересекаются в одной точке.
35. Формула Эйлера.