Гимназия №1543. *9-В класс.* *Геометрия-18* *9 декабря 2009 г.*

Классификация движений

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить...
А. С. Пушкин, «Движение»

1. Четное число прямых пересекаются в одной точке. Каким движением будет композиция симметрий относительно этих прямых? Как зависит ответ от порядка прямых?

Скользящая симметрия

Определение. *Композиция осевой симметрии относительно прямой l и параллельного переноса на вектор $\vec{a}$, направленный вдоль этой прямой, называется* ***скользящей симметрией*** *и обозначается* $S_l^{\vec{a}}$.

2. Коммутативна ли композиция осевой симметрии относительно прямой l и параллельного переноса на вектор $\vec{a}$, направленный вдоль этой прямой?
3. Имеет ли скользящая симметрия инвариантные (неподвижные) точки? Прямые?
4. Каким движением является композиция скользящей симметрии с самой собой? С осевой симметрией относительно той же оси?

Теорема Шаля

Ранее были изучены параллельный перенос, поворот (в т. ч. центральная симметрия) и осевая симметрия. Скользящая симметрия – новый вид движений, полученный с помощью композиции известных. Сколько же всего существует видов движений?

Теорема о двух гвоздях. *Две точки A и B и их образы A_1 и B_1 задают ровно два движения.*

Теорема Шаля. ***Все движения плоскости исчерпываются поворотами, параллельными переносами, осевыми и скользящими симметриями.***

Замечание. Тождественное движение можно считать частным случаем поворота или параллельного переноса.

Для доказательства рассмотрим произвольную точку А, ее образ В и образ В – точку С. Для каждого случая расположения этих точек предъявим два движения. По теореме 3б других движений нет.

Движения первого и второго рода.

Рассмотрим движения как процесс, а не как результат. Тогда для осуществления осевой и скользящей симметрии потребуется выход в трехмерное пространство. Именно наша неспособность выхода в четырехмерное пространство мешает превратить правую перчатку в левую, несмотря на то, что они симметричны, а значит, равны по определению!

Две упорядоченные тройки точек A_1, B_1 и C_1 и A_2, B_2 и

C_2, не лежащие на одной прямой, называются одинаково ориентированными, если обход контуров треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ осуществляется в одном и том же направлении (либо по часовой стрелке, либо против).

5. На плоскости в вершинах треугольника лежат три шайбы. Хоккеист выбирает одну из них и бьет по ней так, что она проходит между двумя другими и останавливается в какой-либо точке. Могут ли все шайбы вернуться на свои прежние места после 25 ударов?

Всякое движение либо сохраняет ориентацию всех троек точек (и тогда оно называется движением I рода), либо меняет ориентацию всех троек точек (и тогда оно называется движением II рода). Параллельный перенос и поворот являются движениями I рода, а осевая и скользящая симметрии – II рода. <u>По роду движения и наличию неподвижных точек однозначно определяется вид движения.</u>

6. Найдите по роду движения и наличию неподвижных точек композицию: а) двух центральных симметрий; б) двух осевых симметрий с параллельными осями; в) двух осевых симметрий с пересекающимися осями; г) параллельного переноса и центральной симметрии; д) поворота на произвольный угол и параллельного переноса.
7. *(remake)* A и B – различные точки. Каким движением будет композиция поворотов: а) $R_A^{90^\circ} \circ R_B^{90^\circ}$; б) $R_A^{60^\circ} \circ R_B^{60^\circ}$?
8. Может ли композиция двух поворотов оказаться симметрией (осевой или скользящей)?
9. Пусть композиция двух поворотов оказалась поворотом. Найдите угол этого поворота. *Указание*. Докажите, что при повороте на угол α все прямые поворачиваются на угол α.
10. Всегда композиция двух поворотов является поворотом?

Пока открыт вопрос: рассмотрим композицию двух поворотов. При каких условиях она окажется параллельным переносом? При каких поворотом? Как построить его центр?

11. Какое движение является композицией осевой симметрии и параллельного переноса на вектор: а) перпендикулярный оси; б) составляющий с осью острый угол?
12. Каким движением является композиция двух скользящих симметрий с пересекающимися осями? *Указание*. Представьте каждую симметрию как композицию осевой симметрии и переноса в удобном порядке и «упростите выражение».
13. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360°, является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол поворота? *Указание*. Представьте каждый поворот как композицию двух симметрий. Выберите оси так, чтобы две из четырех симметрий совпали. Проверьте, что полученному результату соответствуют случаи, разобранные в задаче 7.
14. Докажите, что композиция двух поворотов на углы, в сумме кратные 360°, является параллельным переносом. Как построить вектор переноса?
15. Докажите, что каждое движение плоскости может быть представлено в виде композиции не более чем трех осевых симметрий.

    Замечание. Этот факт может быть получен с помощью теоремы Шаля перебором. А можно вывести его непосредственно из теоремы о трех гвоздях, после чего получить теорему Шаля, рассматривая композиции двух и трех осевых симметрий с различным расположением осей.

Домашнее задание.

16. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.
17. Фигура на плоскости имеет ровно две оси симметрии. Найдите угол между этими осями.
18. На плоскости даны прямые l_1, l_2, ..., l_{2n}, пересекающиеся в одной точке. Блоха сидит в некоторой точке M плоскости и прыгает через прямую l_1, попадая в точку M_1, причём M и M_1 симметричны относительно прямой l_1, далее — через прямую l_2 и т.д. Докажите, что если через $2n$ прыжков блоха оказалась в точке M, то, начиная движение из любой точки плоскости, через $2n$ прыжков блоха окажется на прежнем месте.
19. а) Какое движение является композицией трех осевых симметрий относительно осей, пересекающихся в одной точке?

    б) Впишите в данную окружность треугольник со сторонами, параллельными трем данным прямым.
20. *(remake)* Через общую точку двух пересекающихся окружностей проведите прямую, на которой эти окружности высекают равные хорды.