

Задачи для подготовки к зачетуОсновные построения

1. Построение середины отрезка, перпендикуляра к данной прямой через данную точку, биссектрисы угла; откладывание угла, равного данному; проведение через данную точку прямой, параллельной данной.
2. Деление отрезка на n равных частей; деление отрезка в данном отношении (заданном либо численно, либо двумя отрезками).
3. Построение прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе.
4. Построение описанной, вписанной и невписанных окружностей данного треугольника.
5. Проведение касательной к окружности через данную точку.
6. Построение общих касательных к двум данным окружностям
7. Построение по данным отрезкам с длинами a, b, c отрезков длины $\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 - b^2}, \sqrt{ab}$ (среднего геометрического), $\frac{ab}{c}$ (четвертого пропорционального).

Задачи на построение

8. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.
9. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.
10. Постройте треугольник по трем медианам.
11. Точка M лежит внутри острого угла ABC . Найдите на сторонах угла такие точки E и D , чтобы треугольник MEC имел наименьший периметр.
12. Даны четыре попарно непараллельные прямые и не принадлежащая им точка O . Постройте параллелограмм с центром в точке O , вершины которого лежат на данных прямых, по одной на каждой.
13. Постройте треугольник ABC , если даны точки A и B и прямая, на которой лежит биссектриса угла C .
14. Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и сумме двух других сторон.
15. Постройте треугольник по двум сторонам и разности углов, прилежащих к третьей.
16. Постройте квадрат по его центру и двум точкам а) на противоположных; б) на соседних сторонах (один из пунктов опишите полностью, в другом достаточно анализа)
17. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая – на данной прямой, третья – в данной точке.
18. Постройте квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.
19. Постройте: а) пятиугольник; в) $2n+1$ – угольник, если даны точки, являющиеся серединами его сторон.
20. Впишите в данную окружность треугольник со сторонами, параллельными трем данным прямым.
21. Через точку внутри данного круга с центром O проведите такую хорду AB , чтобы угол AOB имел заданную угловую величину.
22. Впишите квадрат в данный параллелограмм.
23. а) Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.
б) Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.
в) Постройте трапецию по боковым сторонам, отрезку, соединяющему середины оснований, и меньшему основанию
г) Постройте трапецию по диагоналям, отрезку, соединяющему середины оснований, и меньшему основанию.
24. Через общую точку двух окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.
25. Постройте отрезок, равный и параллельный данному, концы которого принадлежат двум данным окружностям.
26. а) В каком месте построить мост через реку с параллельными берегами, чтобы путь между двумя расположенными на разных берегах деревнями был кратчайшим?
б) Решите аналогичную задачу для деревень, разделенных несколькими реками.
27. Постройте четырехугольник по четырём сторонам и средней линии.
28. С помощью циркуля и линейки постройте четырёхугольник $ABCD$ по четырём углам и сторонам $AB = a$ и $CD = b$.
29. В данный треугольник ABC впишите квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC и по одной на сторонах AB и BC .
30. В окружности проведены два радиуса. Постройте хорду, делящуюся ими на две равные части.
31. Впишите квадрат в данный сегмент.
32. Постройте параллелограмм по острому углу, меньшей диагонали и отношению высот.
33. Постройте треугольник по двум углам и периметру

34. Постройте треугольник по трем высотам.
35. Дан угол ABC и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M .
36. Постройте треугольник по основаниям его высот.
37. Постройте треугольник по точкам пересечения его высот с описанной окружностью.
38. Постройте треугольник по высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной вершины.
39. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник данного периметра.
40. В данный треугольник впишите ромб, имеющий с треугольником общий угол A .
41. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отрезок которой, заключенный внутри данного угла, делится бы этой точкой в данном отношении.
42. Постройте в треугольнике ABC такую точку X , что $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCA$.
43. К окружности с недоступным центром проведите касательную в данной на ней точке.
44. С помощью одной линейки опустите из данной точки перпендикуляр на прямую, содержащую данный диаметр данной окружности.
45. Даны две параллельные прямые l_1 и l_2 . С помощью одной линейки
 - а) разделите пополам отрезок, расположенный на одной из них;
 - б) удвойте отрезок, расположенный на одной из них
 - в) разделите отрезок, расположенный на одной из них на n равных частей
 - г) проведите через данную точку M прямую, параллельную данным
46. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все точки, кроме этих, стерли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.

Применение движений в задачах на доказательство

47. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и касательными к его вписанной окружности, проведенными параллельно сторонам, равны.
48. Даны две концентрические окружности. Третья окружность пересекает одну из них в точках A и D , а другую – в точках B и C . Докажите, что $AB = CD$, $AC = BD$, а $AD \parallel CD$.
49. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.
50. Пусть A_1, B_1, C_1 – середины сторон соответственно BC, AC и AB треугольника ABC , точки O_1, O_2 и O_3 – центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1B_1C и A_1BC_1 , а точки M_1, M_2 и M_3 – центры описанных около этих же треугольников окружностей. Докажите, что треугольники $O_1O_2O_3$ и $M_1M_2M_3$ равны.
51. **Точка Торричелли.** На сторонах треугольника ABC построены вне его равносторонние треугольники BCA_1, CAB_1 и ABC_1 и проведены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 . Докажите, что эти отрезки: а) равны между собой; б) пересекаются под углом 60° ; в) пересекаются все три в одной точке; г) если эта точка находится внутри треугольника ABC , то сумма расстояний от нее до трех вершин треугольника равна каждому из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 .
52. Пусть M и K – середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите угол между прямыми AM и BK .
53. Дан параллелограмм $ABCD$ и некоторая точка M . Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.
54. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOB и COD , касаются.
55. M и N – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если длина отрезка MN равна полусумме длин сторон AD и CB , то $ABCD$ – трапеция или параллелограмм.
56. Докажите, что разность оснований любой трапеции больше разности ее боковых сторон.
57. Диагонали некоторой трапеции равны 5 см и 12 см, а основания 3 см и 10 см. Найдите угол между диагоналями этой трапеции.
58. Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KMXY$. Докажите, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.
59. Определите, каким движением является композиция:
 - а) двух параллельных переносов;
 - б) двух центральных симметрий;
 - в) двух поворотов;
 - г) параллельного переноса и поворота
 - д) двух осевых симметрий относительно прямых, пересекающихся в одной точке;
 - е) осевой симметрии и параллельного переноса;
 - ж) осевой симметрии и поворота.
60. Аксиома подвижности. Теоремы о двух и о трех гвоздях. Теорема Шаля.

