Длина окружности и площадь круга

Рассмотрим для данной окружности множество P_1 периметров вписанных многоугольников и множество P_2 периметров описанных многоугольников. *Любое число из P_1 меньше любого числа из P_2*. С другой стороны, при подходящем выборе вписанного и описанного многоугольников *разница периметров может быть сколь угодно малой*. Этого можно достичь, например, выбирая правильные многоугольники с достаточно большим числом сторон. При выполнении двух подчеркнутых условий для множеств P_1 и P_2 существует единственное *разделяющее число*, большее любого числа из P_1, но меньшее любого числа из P_2. Его и называют ***длиной окружности***.

Теорема. *Длина окружности пропорциональна ее радиусу*.

Доказательство. Возьмем две окружности с радиусами R_1 и R_2. Впишем в каждую правильный n-угольник. Их периметры $P_1=n\cdot 2R_1\sin 180°/n$, $P_2=n\cdot 2R_2\sin 180°/n$. Поэтому $P_1/P_2 = R_1/R_2$. Поскольку при достаточно больших n периметр n-угольника сколь угодно близок к длине окружности, то $l_1/l_2=R_1/R_2$.

Обозначив отношение длины окружности к диаметру $l_1/2R_1 = l_2/2R_2 = \pi$, получим $\boxed{l = 2\pi R}$.

Для приближенного вычисления π древние и средневековые математики вычисляли периметры правильных вписанных многоугольников с все большим числом сторон по формуле удвоения.

Заменив в определении длины окружности периметры многоугольников на их площади, получим определение площади круга. Площадь описанного n-угольника $S_n= ½\, P_nR$, где P_n – его периметр. При достаточно больших n S_n сколь угодно близко к площади круга S, а P_n – к длине окружности $l = 2\pi R$, поэтому $S = ½\cdot 2\pi R\cdot R = \pi R^2$. Итак, $\boxed{S = \pi R^2}$

1.
2. Хорды АВ и АС имеют одинаковую длину. Образованный ими вписанный угол равен 30°. Найдите отношение площади той части круга, которая заключена в этом угле, к площади всего круга.

Задача на 5

3. *Теорема Коперника*. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка К подвижной окружности?

Домашнее задание

4. Все углы многоугольника равны между собой. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри этого многоугольника до его сторон есть величина постоянная.
5. Три равные окружности радиуса R попарно касаются друг друга в точках А, В, С. Найдите:
   а) площадь криволинейного треугольника АВС (его стороны – дуги данных окружностей);
   б) длину окружности, вписанной в криволинейный треугольник АВС;
   в) длину окружности, вписанной в треугольник АВС.
6. Докажите, что если все стороны описанного пятиугольника равны между собой, то он правильный.
7. По данному радиусу R найдите сторону и площадь вписанного в окружность правильного двенадцатиугольника.
8. Найдите площадь кольца, заключенного между вписанной и описанной окружностями правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; б) шестиугольника со стороной a.

Длина окружности и площадь круга-2

1. Найдите площадь и периметр треугольника Рело ширины a.
2. Проведены дуги окружностей с центрами в вершинах квадрата со стороной a и радиусами, равными стороне квадрата. Найдите площади и периметры заштрихованных фигур.
   а) б) в)
3. Вообразим, что Земля обтянута по экватору обручем, и так же обтянут апельсин. Окружность каждого обруча удлинили на 1 метр. Какая из получившихся щелей шире?
4. Окружность, равная окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a, катится вокруг правильного шестиугольника со стороной a по его сторонам. Найдите длину пути, который описывает центр окружности за полный поворот вокруг шестиугольника.
5. Постройте круг, площадь которого равна а) сумме площадей нескольких данных кругов;
   б) площади данного кольца.
6. Вершины правильного шестиугольника со стороной a являются центрами кругов радиуса $a/\sqrt{2}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих кругов.

Домашнее задание

7. Через концы дуги АВС, равной 120°, проведены касательные к окружности, пересекающиеся в точке D. В полученную фигуру ABCD вписана окружность. Найдите отношение длины этой окружности к длине дуги АВС.
8. В правильный многоугольник вписана окружность. Докажите, что отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, к площади многоугольника равно отношению длины окружности к периметру многоугольника.
9. Дуга сегмента содержит 120° и имеет длину l. Определите длину окружности, вписанной в этот сегмент.
10. В равнобедренном треугольнике АВС стороны АВ = ВС = a, $\angle$АВС = 120°. Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны АВ в точке D. Вторая окружность имеет центром точку В и проходит через точку D. Найдите площадь общей части кругов.
11. Круговой сектор радиуса R с дугой в 90° разделен на две части дугой такого же радиуса с центром в конце дуги сектора. Найдите площадь круга, вписанного в меньшую из этих частей.