Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-30 19 февраля 2010 г.

Правильные многоугольники

Определение. *Многоугольник называется **правильным**, если равны все его стороны и все его углы.*

Теорема. *Около правильного многоугольника можно описать окружность, и в него можно вписать окружность. Центры этих окружностей совпадают. Вписанная окружность касается сторон правильного многоугольника в их серединах.*

1. Вычислите угол правильного n-угольника и заполните таблицу:

Число сторон	n	3	4	5	6	8	12
Величина угла							

2. Какие движения переводят правильный n-угольник в себя?

Взаимосвязь между стороной правильного n-угольника a_n, радиусом описанной около него окружности R и радиусом вписанной окружности r.

$\boxed{a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}}$, $\boxed{a_n = 2r\,tg\frac{\pi}{n}}$, $\boxed{r = 2R\cos\frac{\pi}{n}}$

n	3	4	6
a_n	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
a_n	$2r\sqrt{3}$	$2r$	$2r/\sqrt{3}$
r	$R/2$	$R\sqrt{2}/2$	$R\sqrt{3}/2$

3. Общая хорда длины a служит для одной окружности стороной вписанного правильного треугольника, а для другой – стороной вписанного правильного двенадцатиугольника. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

Домашнее задание

4. Определите длину диагоналей правильного 8-угольника а) по данному радиусу описанной окружности R; б) по данной стороне a.
5. При каких n у правильного n-угольника существуют а) параллельные; б) перпендикулярные диагонали? в) Какие углы возможны между пересекающимися диагоналями правильного n-угольника?
6. На сторонах правильного шестиугольника вне его построены шесть квадратов. Докажите, что их «наружные» вершины образуют правильный 12-угольник.
7. Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения их площадей.
8. В одну и ту же окружность вписаны правильный треугольник и квадрат. Найдите периметр квадрата, если периметр треугольника равен 18 см.

Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-31-32 26 февраля – 10 марта 2010 г.

Правильные многоугольники – 2-3

1. Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников: вписанного в окружность и описанного около нее.
2. Обязательно ли является правильным многоугольник, если а) все его стороны равны, и около него можно описать окружность? б) все его углы равны, и около него можно описать окружность? в) все его стороны равны, и в него можно вписать окружность? г) все его углы равны, и в него можно вписать окружность?
3. Диагонали AC и BD правильного пятиугольника ABCDE пересекаются в точке M. а) Докажите, что $AM^2 = AC\cdot MC$. б) Вычислите AM : MC.
4. В правильном пятиугольнике провели все диагонали. а) Докажите, что они ограничивают правильный пятиугольник. б) Найдите отношение площадей полученного и исходного пятиугольников.
5. Выразите сторону правильного а) десятиугольника; б) пятиугольника через радиус описанной окружности.
6. Впишите в данную окружность правильный n-угольник при n = 6; 3; 4; 8; 12.
7. Впишите в данную окружность правильный n-угольник при n = 10; 5; 15.

Теорема Гаусса. *Правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда* $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_k$, *где* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *– различные простые числа вида* $2^{2^n}+1$.

8. *Формула удвоения*. Пусть в окружность радиуса R вписаны правильные n-угольник со стороной a_n, $2n$-угольник со стороной a_{2n} и описан правильный n-угольник со стороной b_n. Выразите a_{2n} и b_n через a_n и R.

Задачи на 5

9. Какие существуют паркеты, состоящие из одинаковых правильных многоугольников? Из двух видов правильных многоугольников?
10. В правильном двенадцатиугольнике есть точки, в которых пересекаются сразу три диагонали, и даже сразу четыре. Найдите их с помощью точного чертежа, а затем обоснуйте свое открытие.