Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-34 19 марта 2010 г.

Скалярное произведение векторов

Определение. ***Скалярным произведением*** *двух ненулевых векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$.

Геометрический смысл скалярного произведения: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_{\vec{a}}|$

Критерий равенства нулю: $(\vec{a}\cdot\vec{b}=0)\Leftrightarrow(\vec{a}=\vec{0}\vee\vec{b}=\vec{0}\vee\vec{a}\perp\vec{b})$

Свойство скалярного квадрата: $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$

Законы скалярного умножения:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность)
- $k\vec{a}\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (однородность)
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивность)
- $\vec{a}^{\,2}\geq 0,\ (\vec{a}^{\,2}=0)\Leftrightarrow(\vec{a}=\vec{0})$ (положительная определенность)

1. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 2. Вычислите: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; г) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$.
2. Докажите равенства: а) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$; б) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}$.
3. Упростите выражение $(\vec{a}+4\vec{b})\cdot(2\vec{a}-5\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})^2$.
4. При каких условиях выполняются равенства: а) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}$; б) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2}$? Какие векторные выражения можно упрощать аналогично алгебраическим, а какие нельзя?
5. Пусть $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$. Следует ли отсюда, что либо $\vec{a}=\vec{0}$, либо $\vec{b}=\vec{c}$?
6. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что векторы $2\vec{a}+5\vec{b}$ и $3\vec{a}-2\vec{b}$ перпендикулярны, и длина вектора $\vec{a}$ вдвое больше, чем длина $\vec{b}$.
7. Докажите с помощью скалярного произведения теорему косинусов.
8. Дан треугольник ABC, в котором AC = 3, BC = 4, ∠ACB = 120°. Найдите расстояние от вершины C до точки M, делящей сторону AB в отношении 1 : 3, считая от вершины A.

Домашнее задание

9. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1. Вычислите сумму $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}$.
10. Точка M лежит на прямой BC, причем $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{MC}$. Докажите, что $AB^2+kAC^2=BM^2+kCM^2+(1+k)\,AM^2$. Сравните полученный результат с теоремой Стюарта.
11. В четырехугольнике ABCD AB = a, CD = b, прямые AB и CD пересекаются под углом α. Найдите расстояние между серединами сторон BC и AD.
12. Основания прямоугольной трапеции равны 2 и 4, меньшая боковая сторона равна 2. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до середины большей стороны.
13. Докажите, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$, где O – центр описанной окружности, а H – ортоцентр треугольника ABC.

Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-35 24 марта 2010 г.

Применение скалярного произведения

1. Докажите, что если ABCD – прямоугольник, то для любой точки M выполняется векторное равенство $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}$
2. Точки M и K делят стороны BC и CD параллелограмма ABCD в отношениях BM : MC =2:1, CK : KD = 3:2. Отрезки AM и BD пересекаются в точке N. Найдите длину отрезка NK и косинус угла NKC, если AB = BM = 4, ∠ABM = 120°

Домашнее задание

3. В параллелограмме ABCD точка M – середина BC, точка N – середина CD. Диагональ BD пересекает отрезок AM в точке E. Найдите EN, если AB = 8, AD = 5, ∠BAD = 60°.

4. Диагонали AC и BD четырехугольника ABCD пересекаются в точке O, причем AO = 4, CO = 1,BO = OD = 2, ∠COD = 60°. Найдите косинус угла между прямыми BC и AD. .
5. а) Докажите, что для произвольных точек A, B, C, D имеет место равенство $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$; б) Примените полученное равенство для доказательства того, что высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.
6. а) Докажите, что для произвольных точек A, B, C, D имеет место равенство $2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AD^2+BC^2-AB^2-CD^2$.

   б) Примените полученное равенство для доказательства того, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.
7. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты AMNB и CKLA. Докажите векторным методом, что медиана AP треугольника ABC перпендикулярна прямой ML.

Гимназия №1543. 9-В класс. Геометрия-36 30 марта 2010 г.

Применение скалярного произведения-2

1. Найдите длину биссектрисы, проведенной из прямого угла треугольника с катетами a и b.
2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки M, N и K. Известно, что AM = 6, BM = BN = 4, NC = 1, AK : KC = 1 : 2, ∠ABC = 60°. Отрезки BK и MN пересекаются в точке O. Найдите длину отрезка BO.
3. В параллелограмме ABCD K – середина BC, M – середина CD. Найдите AD, если AK = 6, AM = 3, ∠KAM = 60°.
4. Пусть M – середина стороны AB треугольника ABC. Докажите, что а) $4CM^2=AB^2+4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$; б) угол C треугольника ABC будет острым, прямым или тупым смотря по тому, будет ли длина медианы CD больше, равна или меньше ½AB.
5. Докажите, что если медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны, то cos∠C≥0,8.
6. а) *Теорема Лейбница*. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что для произвольной точки X плоскости выполняется равенство $XA^2+XB^2+XC^2=3XM^2+AM^2+BM^2+CM^2$. б) Найдите точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного треугольника принимает наименьшее возможное значение.

Задача на 5

7. Докажите векторным методом, что сумма квадратов сторон четырехугольников равна сумме квадратов его диагоналей тогда и только тогда, когда он является параллелограммом.

Домашнее задание

8. На стороне AB параллелограмма ABCD отмечена точка S, на стороне BC – точка T, точка M – середина стороны AD. При этом AS = 1 см, SB = 2 см, BT = 3 см, TC = 2 см. Прямые BM и ST перпендикулярны. Найдите длину отрезка BM.
9. В треугольнике ABC ∠BAC = 60°, AB = 8, AC = 12. Точка N делит сторону BC в отношении BN : NC = 1 : 5. M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите а) длину отрезка MN; б) cos∠AMN. в) Пусть AH – высота треугольника AMN. Найдите MH : HN.
10. В окружность радиуса R вписан правильный треугольник ABC. Пусть M – произвольная точка окружности. Вычислите $MA^2+MB^2+MC^2$.
11. Даны три точки A, B, C. Докажите, что равенство $AC^2+BC^2=½AB^2$ выполняется тогда и только тогда, когда точка C является серединой отрезка AB.
12. Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны. Получите равенство, связывающее длины сторон этого треугольника.