9 математический класс **5 сентября 2009 года.**

Функция Эйлера. Задачки.

Задачка 1. Докажите, что отображение f из лекции — биекция.

Задачка 2. Докажите, что для произвольного $m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k}$ верны следующие формулы:

а) $\varphi(m) = (p_1^{n_1} - p_1^{n_1-1}) \cdot (p_2^{n_2} - p_2^{n_2-1}) \cdot ... \cdot (p_k^{n_k} - p_k^{n_k-1})$;

б) $\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$.

Задачка 3. Вычислите $\varphi(12), \varphi(81), \varphi(1001)$.

Задачка 4. Докажите, что а) $\left(2^{3600} - 1\right) \vdots 1001$; б) $\left(2^{243} + 1\right) \vdots 3^6$.

Задачка 5. Найдите остаток от деления: а) $3^{80} + 7^{80}$ на 100; б) $(3^{101} + 5^{101})^{1000}$ на 75.

Задачка 6. Решите уравнения: а) $\varphi(x) = 1$; б) $\varphi(x) = 8$; в) $\varphi(x) = 18$; г) $\varphi(5^x) = 100$; д) $\varphi(3^x 5^y) = 600$.

Задачка 7. а) Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n чётно; б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

Задачка 8. Не забыли ли вы, что $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$? Нет? Ну тогда докажите, что $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(\text{НОД}(a, b))\varphi(\text{НОК}(a, b))$.

Задачка 9. Выпишем все правильные дроби со знаменателем 30 и приведем их все к несократимому виду. Докажите, что а) $30 = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(10) + \varphi(15) + \varphi(30)$; б) любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей.

Задачка 10. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Удастся ли вам доказать, что число карточек, на которых написано произвольное натуральное число k, равно $\varphi(k)$?

9 математический класс **5 сентября 2009 года.**

Функция Эйлера. Задачки.

Задачка 1. Докажите, что отображение f из лекции — биекция.

Задачка 2. Докажите, что для произвольного $m = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k}$ верны следующие формулы:

а) $\varphi(m) = (p_1^{n_1} - p_1^{n_1-1}) \cdot (p_2^{n_2} - p_2^{n_2-1}) \cdot ... \cdot (p_k^{n_k} - p_1^{n_k-1})$;

б) $\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$.

Задачка 3. Вычислите $\varphi(12), \varphi(81), \varphi(1001)$.

Задачка 4. Докажите, что а) $\left(2^{3600} - 1\right) \vdots 1001$; б) $\left(2^{243} + 1\right) \vdots 3^6$.

Задачка 5. Найдите остаток от деления: а) $3^{80} + 7^{80}$ на 100; б) $(3^{101} + 5^{101})^{1000}$ на 75.

Задачка 6. Решите уравнения: а) $\varphi(x) = 1$; б) $\varphi(x) = 8$; в) $\varphi(x) = 18$; г) $\varphi(5^x) = 100$; д) $\varphi(3^x 5^y) = 600$.

Задачка 7. а) Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n чётно; б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

Задачка 8. Не забыли ли вы, что $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$? Нет? Ну тогда докажите, что $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(\text{НОД}(a, b))\varphi(\text{НОК}(a, b))$.

Задачка 9. Выпишем все правильные дроби со знаменателем 30 и приведем их все к несократимому виду. Докажите, что а) $30 = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(10) + \varphi(15) + \varphi(30)$; б) любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей.

Задачка 10. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Удастся ли вам доказать, что число карточек, на которых написано произвольное натуральное число k,