9 математический класс **12 сентября 2009 года.**

Функция Эйлера и теорема Ферма-Эйлера. Разбор задач.

1) В первой лекции доказывалась **малая теорема Ферма: если p простое и $a \not\vdots\, p$, то $(a^{p-1} - 1) \vdots\, p$**. Применяя её, докажите, что для простого $p \neq 2$ верно $(7^p - 5^p - 2) \vdots\, 6p$.

$7^p - 5^p - 2 = (7^p - 7) - (5^p - 5)$ и кратно p, ибо на p делятся оба слагаемых в скобках согласно МТФ. Кроме того, данное число чётно, а также сравнимо с $1^p - (-1)^p - 2$ по модулю 3. Но поскольку p нечётно, $(-1)^p = -1$ и мы получаем, что наше число кратно 3. Тем самым, мы решили задачу для $p > 3$. Осталось проверить для $p = 3$, что $7^3 - 5^3 - 2 = 216$ делится на 18, это верно.

2) Докажите **теорему Вильсона: для простого p число $(p-1)! + 1$ делится на p**.

Поскольку в $\mathbb{Z}_p$ можно делить на ненулевые числа, все ненулевые остатки разбиваются на пары, дающие в произведении 1. Для чисел 1 и $p-1$ парой служат они сами, для остальных — нет (в самом деле, если $a^2 = 1$, то $(a-1)(a+1) \vdots\, p$). То есть все числа в $(p-1)!$, кроме двух крайних разобьются на пары, дающие в произведении 1, а тогда понятно, что $(p-1)! \equiv (p-1) \, (mod\, p)$.

3) **Функция Эйлера $\varphi(n)$** —количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Докажите,мспользуя мультипликативность функции Эйлера, что если $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа, входящие в разложение n, то верна такая **формула для функции Эйлера: $\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$**. С помощью формулы покажите, что $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$.

Это несложно.

4) Аналогом малой теоремы Ферма для составных чисел служит **теорема Ферма-Эйлера: если *НОД*$(a, n) = 1$, то $\left(a^{\varphi(n)} - 1\right) \vdots\, n$**. а) На какие две цифры оканчивается 1543^{43}? б) Докажите, что $(6^{147} + 1) \vdots\, 7^3$.

а) $\varphi(100) = 40$, поэтому $1543^{40} - 1 \ \vdots 100$, то есть оканчивается на 01. Дальше руками. Ответ: на 07. б)

$\varphi(7^3) = 294$, поэтому $6^{294} - 1 \ \vdots 7^3$. Тогда $6^{147} - 1 \quad 6^{147} + 1 \ \vdots 7^3$. Поскольку первая скобка вообще на 7 не делится (это лего понять, зная, что $6 = -1$), то делится вторая, что и надо было показать.

5) Доказательства обоих теорем основаны на возможности деления среди чисел, взаимно простых с модулем. Деление практически сводится к решению линейного диофантова уравнения. Разделите 15 на 43 по модулю 2009.

Ответ 561.

6) Докажите, что для любого n существует число с суммой цифр n и делящееся на n. (Подсказка: поищите среди чисел, состоящих только из 0 и 1.)

Заметим, что если $a \vdots b$, то число, полученное записыванием подряд нескольких a также делится на b. Решим задачу. Пусть сначала n не делится ни на 2, ни на 5. Тогда $10^{\varphi(n)} = 1$ Более того, $10^{k\varphi(n)} = 1$ при всех целых $k \geqslant 0$. Поэтому число $10^0 + 10^{\varphi(n)} + 10^{2\varphi(n)} + \cdots + 10^{(n-1)\varphi(n)} = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ единиц}}$ делится на n и сумма его цифр равна в точности n. Если же число n содержит двойки и/или пятёрки, представим его в виде $n = m \cdot 2^k 5^l$, где $НОД(m, 10) = 1$. Теперь для m есть число с суммой цифр m, делящееся на m. Написав его $2^k 5^l$ раз подряд, мы получим число с суммой цифр n и делящееся на m. Чтобы оно делилось и на n, допишем к нему нужное количество нулей.

7) а) Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n чётно; б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

а) они разбиваются на пары $\frac{a}{n}$ и $\frac{n-a}{n}$

б) как следует из пункта а), ответ $\frac{\varphi(n)}{2}$

8) Известно, что $ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b)$. Докажите, что $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(\text{НОД}(a, b))\varphi(\text{НОК}(a, b))$.

по формуле для $\varphi(n)$

9) Докажите, что любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей.

Рассмотрим натуральное число n и выпишем дроби: $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}$. Этих дробей ровно n. Теперь сократим все дроби (первую дробь сократим до $\frac{0}{1}$). Очевидно, что у сокращённых дробей знаменатели будут делителями числа n. Причём дробей с каждым знаменателем-делителем d будет ровно $\varphi(d)$, потому что всякая правильная несократимая дробь со знаменателем d получится, а вариантов числителя в точности $\varphi(d)$. Общее количество дробей тогда будет $\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \varphi(d_3) + \cdots + \varphi(d_k)$. Но это равно n, поскольку всего есть ровно n дробей. Что и требовалось доказать.