Теория вероятностей. Основные понятия.

Вероятность. Представим себе следующий эксперимент: Никита бросает шестигранный кубик. Все знают, что вероятность того, что в результате этого эксперимента на кубике выпадет пятёрка, равна $\frac{1}{6}$. Но как следует понимать последнее предложение, и что же такое вероятность? Легко себе представить понятие частоты выпадения пятёрки за n экспериментов. Если мы проведём n экспериментов по бросанию кубика, посчитаем количество m экспериментов, в результате которых на кубике выпала пятёрка, то величина $\frac{m}{n}$ и есть частота выпадения пятёрки. Способ проведения эксперимента и форма кубика намекают нам на то, что исходы эксперимента (выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6) в некотором смысле равноправны. Поэтому, разумно было бы предположить, что частоты выпадения разных чисел должны совпадать. Как говорит наш опыт, если проведено много таких экспериментов, то частоты действительно становятся близкими к $\frac{1}{6}$, причём чем больше экспериментов проведено, тем ближе частоты к этому числу. Это число и есть вероятность исхода.

Более формально. Центральным объектом нашего внимания будет эксперимент — нечто, обладающее некоторым множеством исходов, причём эти исходы мы по каким-то своим причинам считаем равноправными. Например, множество исходов описанного выше эксперимента:
$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где исход ω_k означает "на кубике выпала цифра k". Это множество исходов называется *вероятностным пространством.* Мы будем рассматривать только конечные вероятностные пространства. Вероятностью исхода назовём число, обратное мощности (числу элементов) вероятностного пространства.

Вообще, нас редко будут интересовать отдельные исходы. Например, в терминах вероятностей исходов нельзя описать вероятность того, что на кубике выпадет число, меньшее 5. С другой стороны, тот факт, что на кубике выпало число, меньшее 5, означает, что случился один из исходов множества $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Таким образом, мы приходим к понятию *события.* Событием называется некоторое подмножество вероятностного пространства. Мы говорим, что событие произошло, если результатом экспермента стал один из исходов этого события. *Вероятностью события* называется отношение его мощности к мощности всего пространства (как ещё говорят, *отношение числа благоприятных исходов к числу всех исходов*).

Пример. Рассмотрим эксперимент: из 52-карточной колоды вытаскивают одну карту. Придумайте вероятностное пространство, соответствующее данному эксперименту. Какова его мощность? Найдите следующие события: "вытащена двойка", "вытащена красная тройка", "вытащена карта пиковой масти". Найдите вероятности этих событий.

Более сложный пример. Два человека A и B играют в русскую рулетку. В шестизарядный револьвер заряжено подряд 2 патрона. A раскрутил барабан и нажал на спусковой крючок. Выстрела не произошло. Стоит ли B заново раскручивать барабан, если он не хочет застрелиться?

Решенние. Тут мы имеем дело с двумя разными вероятностными пространствами. Возьмём в качестве вероятностного пространства в обоих случаях положение барабана перед выстрелом B.

В первом случае исходы таковы: $\{000110, 001100, 011000, 110000\}$ (первая цифра показывает наличие патрона напротив курка).

Во втором случае: $\{110000, 100001, 000011, 000110, 001100, 011000\}$.

Теперь найдём в обоих случаях событие "B застрелится".

В первом случае это одноэлементное множество $\{110000\}$.

Во втором случае: $\{110000, 100001\}$.

Отсюда видно, что если барабан не крутить второй раз, то вероятность застрелиться равна $\frac{1}{4}$. В противном случае вероятность застрелиться выше и равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Операции над событиями. Рассмотрим теперь операции над событиями и вероятности их результатов. Поскольку события есть самые обыкновенные множества, то над ними допустимы все известные вам теоретико-множественные операции.

Для начала рассмотрим унарную операцию дополнения (отрицания). Если A — некоторое событие в пространстве исходов Ω, то его дополнение $\bar{A}$ есть $\Omega \setminus A$ — разность пространства и события. Вероятность дополнения, очевидно, в сумме с вероятностью события составляет 1.

Из бинарных операций нас будут интересовать объединение и пересечение. Объединение событий происходит тогда, когда происходит любое из них. Пересечение событий происходит тогда, когда происходит каждое из них. Обратите внимание, знак $\cap$ во многих случаях просто опускают.

Два простых упражнения.: Пусть перед нами колода из 52 карт. Рассмотрим 2 события: A — извлекли даму, и B — извлекли пиковую карту. Опишите словами: $\bar{A}$, $\bar{B}$, AB, $A \cup B$. Определите вероятности этих событий.

A и B — события. Докажите, что $P(AB) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (буквой P здесь обозначена вероятность соответствующего события).

Независимость. Введём ещё одно очень важное понятие. События A и B называются *независимыми*, когда вероятность их пересечения равна произведению их вероятностей.

Поясним, почему этот термин называется *независимостью*, на примерах.

Пример 1: Никита в одном углу комнаты кидает кубик, а Марфа в другом углу комнаты кидает монетку. А качестве вероятностного пространства возьмём, например, множество пар вида (k, m), где $k = \overline{1, 6}$, $m = \overline{1, 2}$. Рассмотрим события: “Никита выбросил 5” и “Марфа выбросила решку”. Они независимы в смысле данного выше определения. В житейском смысле они тоже независимы: результат броска Марфы никак не влияет на то, что выбросит Никита, и наоборот.

Пример 2: A и B опять играют в русскую рулетку. B барабан во второй раз не раскручивает. Вероятностным пространством будем считать множество возможных положений барабана перед первым нажатием на спусковой крючок. Оказывается, что события “A застрелится” и “B застрелится” очень даже зависимы. Вероятность первого из них $\frac{1}{3}$, второго $\frac{1}{3}$, а вот их пересечения — $\frac{1}{6}$, а не $\frac{1}{9}$. Связано это с тем, что в тех случаях, когда A остался жить, B застреливается только в $\frac{1}{4}$ случаев; то есть наличие рядом живого A в некотором смысле влияет на шансы B застрелить себя.

Вопрос: А что можно сказать о зависимости этих событий, если B барабан второй раз раскручивает?