Сложение и умножение вероятностей.

1. **Априорные вероятности.** В реальных ситуациях редко приходится иметь дело с классическим вероятностным пространством, то есть с множеством $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n,\}$ равновозможных исходов, которые, комбинируясь, образуют события. Как правило, исходы не равновозможны, но про каждый известна так называемая *априорная вероятность* (установлена экспериментально или статистически, латинское *a priori* – "изначально"), она положительна, а сумма вероятностей всех исходов равна 1. Например, монета может быть неидеальна — можно рассмотреть "кривую" монету, у которой орёл выпадает не с вероятностью $\frac{1}{2}$, а, скажем, $\frac{5}{9}$. Тем самым, у нас есть два исхода с априорными вероятностями $\frac{5}{9}$ и $\frac{4}{9}$, дающими в сумме, как и положено, единицу.

2. **Сложение и умножение вероятностей.** Мы говорили о пересечении и объединении событий. Часто удобно пересечение записывать как AB, объединение как $A+B$. В некотором смысле это оправдано тем, что $P(A+B) = P(A)+P(B)$ и $P(AB) = P(A)P(B)$. Нет, ни то, ни другое вообще говоря неверно, но обе формулы верны в некоторых типичных "хороших" случаях. Про вторую вы уже знаете, что это верно тогда, когда события независимы. А первая формула справедлива, если события *несовместны*, то есть одновременно произойти не могут.

Как правило, рассуждения со сложением и перемножением вероятностей применяют в ситуации нескольких независимых экспериментов с разными исходами. Например, в мешке 5 красных и 3 зелёных яблока. Руслан достаёт из мешка два раза по яблоку. Что более вероятно, что они окажутся одного цвета или что разного?

Пусть Руслан достал первое яблоко. Есть два несовместных исхода этого эксперимента: оно красное (вероятность $\frac{5}{8}$) и оно зелёное (вероятность $\frac{3}{8}$). Это можно изобразить двумя стрелочками. Далее Руслан тащит второе яблоко, стрелочки раздваиваются. В случае, если он сначала вытащил красное, вероятность второго красного равна $\frac{4}{7}$, зелёного — $\frac{3}{7}$. После первого зелёного красное будет с вероятностью $\frac{5}{7}$, зелёное — $\frac{2}{7}$. Итого, два одноцветных яблока будут вытащены с вероятностью $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{13}{27}$. Это чуть меньше половины, то есть чуть более вероятно, что яблоки всё же будут разного цвета.

Вообще, вместо комбинаторных рассуждений часто удобно применять теоремы сложения и умножения. Пример: какова вероятность при сдаче карт в преферансе, что в прикупе два туза (в преферансе в колоде 32 карты (шестёрки сбрасывают), в прикуп кладут две карты)?

3. **Что делать, если формулы не работают.** Если события совместны, то есть $P(AB) \neq 0$, то вместо $P(A+B) = P(A)+P(B)$ приходится писать $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$ (вспомните формулу включений и исключений). Если же события являются зависимыми, то $P(AB) = P(A)P(B)$ приходится менять на $P(AB) = P(A)P(B|A)$, где $P(B|A)$ — так называемая условная вероятность — вероятность того, что произошло событие B при условии, что произошло A. Для независимых событий $P(B|A) = P(B)$, потому что A на B не влияет. Можно также написать, что $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

4. **Пример.** у Сергея Менделевича трое детей. Известно, что у него есть сын. Какова вероятность того, что у него есть две дочери? (Считаем вероятности рождения мальчика и девочки равными.)

Пусть A — "есть сын", B — "есть две дочери". Тогда $P(A) = \frac{7}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{3}{8}$ (обратите внимания, события A и B зависимы). Считаем $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{7}$.

4. **Ещё пример.** 20 школьников собираются толкнуть лажовое решение задачи одному из трёх студентов. Известно, что Кир примет лажу с вероятностью $0,2$ и опросит 10 человек (случайно выбранных по журналу), Аня примет лажу с вероятностью $0,3$ и опросит 7 человек, Данич примет лажу с вероятностью $0,5$ и опросит троих оставшихся. Какие шансы у Влада прогнать лажу?

Понятно, какие: $\frac{10}{20}\cdot\frac{2}{10}+\frac{7}{20}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{20}\cdot\frac{5}{10}=\frac{56}{200}=\frac{7}{25}$.

Теперь вот что спросим: пусть известно, что Влад прогнал лажу. Кому он, скорее всего, отвечал?

Для этого обозначим A — "Влад прогнал лажу", H_1 — "Влад сдавал Киру", H_2 — "Влад сдавал Ане", H_3 — "Влад сдавал Даничу". Найдём $P(H_1|A)$, то есть вероятность того, что Влад отвечал Киру, если известно, что лажу у него приняли. Имеем: $P(H_1|A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)}$. $P(A)$ мы считать умеем. А вот $P(AH_1)$ посчитаем так: $P(AH_1) = P(A|H_1)P(H_1)$. Итак: $P(H_1|A) = \frac{P(AH_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10}\frac{10}{20}}{\frac{7}{25}} = \frac{20}{56}$. Аналогично получим, что он отвечал Ане с вероятностью $\frac{21}{56}$ и Даничу с вероятностью $\frac{15}{56}$. Так что скорее всего, Влад отвечал Ане.

Приём, когда из подсчёта двумя способами $P(H_1A) = P(H_1|A)P(A) = P(H_1)P(A|H_1)$ выражается неизвестная условная вероятность $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}$ часто используется, а это выражение называется формулой Байеса.