9 математический класс **19 сентября 2009 года.**

Теория вероятностей. Разбор задач.

1) У Миши есть есть три коробки. В одну он положил 100 рублей, в остальных пусто. Люба выбирает одну из коробок. Затем Миша берет ту из двух оставшихся коробок, где ничего не лежит, и открывает ее. После этого Люба может открыть либо коробку, которую она выбрала сразу, либо вместо нее открыть третью коробку. Если в открытой коробке окажутся 100 рублей, они достанутся Любе. Какую коробку следует Любе открыть? Почему?

Пронумеруем коробочки числами от 1 до 3, начиная с той, на которую указала Люба. Вероятностное пространство состоит из трёх исходов: 100, 010, 001, где k-я цифра обозначает содержимое k-й коробочки. Событие "Люба выигрывает, не меняя решение" есть $\{100\}$, а вот событие "Люба выигрывает, поменяв решение" есть $\{010, 001\}$. Так что решение надо всё же поменять. При этом вероятность выигрыша будет равна 2/3.

2) В корзине M зелёных яблок и N красных. Саша берёт из корзины яблоки, пока не вытащит оттуда все красные. Какова вероятность того, что ни одного яблока после этого там не останется?

Предположим, что Саша не остановится на достигнутом, а вытащит все яблоки. Тогда условие задачи равносильно тому, что последним вытащенным яблоком будет красное. Вероятностным пространством в данном случае будет множество всех последовательностей из M зелёных и N красных яблок. Его мощность: $C_{N+M}^{M} = C_{N+M}^{N}$. Благоприятные исходы — те, где последнее яблоко красное. Таких $C_{N+M-1}^{M} = C_{N+M-1}^{N-1}$. Ответ: $\frac{N}{N+M}$.
Другими словами: ясно, что у любого яблока равные шансы остаться последним. Поэтому вероятностное пространство имеет мощность $N+M$, и ответ $\frac{N}{N+M}$.
На этом примере удобно показать, как иногда по-разному можно выбрать пространства.

3) Папа обещал Мише приз, если он, сыграв поочерёдно с ним и с мамой в шахматы три партии, выиграет две партии подряд. "Ладно, — сказал Миша. — А с кем мне играть сначала, с тобой или с мамой?" "А уж это сам решай", — хитро улыбнулся отец.

Миша знает, что мама играет слабее отца. Какое решение ему принять?

Среднюю партию надо выиграть по-любому, а из крайних — хотя бы одну. Поэтому среднюю лучше играть с мамой, а первую и последнюю — с папой.
Можно решить задачу и вычислениями. Если вероятность победы в партии с папой равна p, с мамой — q и $p < q$, то при последовательности игр "папа-мама-папа" вероятность получения приза Мишей равна $pq(2-p)$, а при "мама-папа-мама" она равна $pq(2-q)$, но $pq(2-p) > pq(2-q)$.

4) Ваши товарищи могут с равной вероятностью играть либо в игру с одной игральной костью, либо в игру с двумя игральными костями. В обеих играх считается количество выпавших очков. В какой-то момент игры вы услышали, что у них выпало 2 очка. Какова вероятность того, что они играют в игру с одной костью?

Положим H_1 — "играют с одной костью", H_2 — "играют с двумя костями", A — "выпало 2 очка". Тогда $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$, $P(A|H_1) = \frac{1}{6}$, $P(A|H_2) = \frac{1}{36}$. Теперь $P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} = \frac{7}{72}$. Далее, $P(H_1|A) = \frac{P(H_1 A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{72}} = \frac{6}{7}$.

5) Печорин и Грушницкий стреляются на дуэли "до первой крови", то есть до попадания в соперника. Печорин поражает соперника с вероятностью $0,7$, Грушницкий — с вероятностью $0,4$. Право первого выстрела устанавливается бросанием монеты. Какова вероятность победы каждого из дуэлянтов?

Пусть Печорин стреляет первым, и вероятность его победы p. Тогда эта вероятность складывается из вероятности немедленной победы первым же выстрелом — она равна $0,7$ — и той же самой вероятности p, которая возникает после того, как оба промажут. Промажут же оба с вероятностью $0,3 \cdot 0,6$, так что получаем уравнение $p = 0,7 + 0,3 \cdot 0,6p$, откуда $p = \frac{35}{41}$. Грушницкий в этой ситуации выигрывает дуэль с вероятностью $\frac{6}{41}$. Это высчитывается не вычитанием из единицы, а таким же подсчётом, а то, что сумма этих вероятностей равна 1, означает, что дуэль "до бесконечности" невозможна (вероятность этого события 0).
Так же точно разбирается случай, когда начинает Грушницкий. В этом случае у Печорина вероятность победы $\frac{21}{41}$, у Грушницкого $\frac{20}{41}$. С учётом бросания вначале жребия, получаем окончательный ответ: вероятность победы Печорина в дуэли равна $\frac{28}{41}$, Грушницкого — $\frac{13}{41}$.

6) Атос и Портос в кабаке играли в какую-то карточную игру. Игра идёт несколько конов, каждый кон кто-то получает очко. Каждый поставил по 4 пистоля, играть уговорились до шести очков. Победитель должен был забрать все 8 пистолей. Когда они сыграли 8 конов и Портос вёл в счёте $5:3$, неожиданно в трактир влетели гвардейцы кардинала. Началась, понятно, драка, и к игре мушкетёры уже не вернулись. Когда вспомнили о деньгах и игре, Портос сказал: "Я вёл в счёте $5:3$, не так ли, сударь? Значит, 5 пистолей из поставленных восьми мои, три — Ваши". "Погодите, — ответил Атос. — Ведь мы с Вами, право же, играем одинаково хорошо. И если уж Вы вели в счёте $5:3$, то Вам по справедливости положено..."

Как предложил поделить деньги Атос?

Благородный и математически образованный Атос рассуждал так: "Мне до победы надо выиграть три кона, причём я не имею права проиграть ни разу. Вероятность моей победы в одном коне $\frac{1}{2}$, а в трёх подряд — $\frac{1}{8}$. Шансы Портоса на победу равны $\frac{7}{8}$. Значит, по справедливости мне следует взять один пистоль из восьми".