9 математический класс **26 сентября 2009 года.**

Разные задачи. Список №1 (с решениями).

1) Найдите наибольшее значение величины $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{m-1}x_m$, если все x_i неотрицательны, а их сумма равна 1.

Ответ $\frac{1}{4}$. Пример $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, остальные нули. Доказательство: расположим отрезки с длинами x_i друг за другом "лесенкой", чередуя горизонтальные и вертикальные отрезки. Тогда рассматриваемая сумма складывается из площадей соответствующих прямоугольников. Вся эта сумма не превосходит площади прямоугольника, стороны которого суть проекции на горизонтальное и вертикальное направления отрезков x_1, x_2, …, x_m. Площадь этого прямоугольника равна ab, где $a + b = 1$. Согласно неравенству Коши, $ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

2) В каждой клеточке прямоугольной таблицы написано либо число 1, либо число -1. Известно, что каждое число встречается как минимум дважды, строк более одной и столбцов более одного. Докажите, что найдутся два столбца и две строки, такие, что сумма четырёх чисел на их пересечении равна нулю.

Пусть таких нет. Рассмотрим 1 и -1. Они в разных клетках, поэтому можно считать, что в разных столбцах. Тогда в обоих этих столбцах все остальные числа одинаковые (пусть -1). Но где-то ещё, в третьем столбце есть 1. Тогда что бы ни стояло в этом столбце на другой строке, возникнет противоречие.

3) Из вершины прямого угла B треугольника ABC опущена высота BO. Докажите, что ее длина равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC и ABC.

Следует сразу из того, что диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме катетов за вычетом гипотенузы.

4) Из Златоуста в Миасс выехали одновременно "ГАЗ", "МАЗ" и "КамАЗ". "КамАЗ", доехав до Миасса, сразу повернул назад и встретил "МАЗ" в 18 км, а "ГАЗ" — в 25 км от Миасса. "МАЗ", доехав до Миасса, тоже сразу повернул назад и встретил "ГАЗ" в 8 км от Миасса. Каково расстояние от Златоуста до Миасса?

Пусть x км между городами, а скорости грузовиков k, m и g км/ч соответственно. По условию задачи $\frac{x+18}{k} = \frac{x-18}{m}$, $\frac{x+25}{k} = \frac{x-25}{g}$, $\frac{x+8}{m} = \frac{x-8}{g}$. Записывая первое уравнение в виде $\frac{x+18}{x-18} = \frac{k}{m}$ и остальные подобным образом, перемножаем их и получаем, что все скорости сократились, образовав соотношение $\frac{(x+18)(x-25)(x+8)}{(x-18)(x+25)(x-8)} = 1$. Мужественное раскрытие скобок приводит к уравнению $x^2 = 25\cdot18\cdot8$, положительным корнем которого является 60. Ответ 60 км.

5) Квадрат разрезан на 36 квадратиков. Один из них единичный, а остальные равны между собой, но не единичные. Найдите площадь исходного квадрата.

Пусть x — сторона каждого из 35 неединичных квадратиков. Предположение $x > 1$ отвергается рассмотрением расположения единичного квадратика в углу исходного квадрата (очевидно), на стороне (очевидно) и внутри (тогда вдоль одной стороны отрезаем слои шириной x, пока единичный квадрат не прижмётся к новой стороне). Если же $x < 1$, то подобным же разбором показываем, что $x = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Также ясно, что хоть к одной стороне большого квадрата единичный не примыкает, и поэтому сторона квадрата равна mx. Записывая площадь, получим $m^2x^2 = 35x^2 + 1$, но $x = \frac{1}{n}$, поэтому $m^2 - 35 = n^2$. Применяя формулу разности квадратов, легко находим единственное подходящее по смыслу решение $m = 17$, $n = 18$. Отсюда площадь равна $\left(\frac{18}{17}\right)^2$. Нетрудно привести и пример с единичным квадратом в углу и каёмкой из 35 маленьких квадратов по двум его сторонам.

6) Найдите наибольшее n такое, что для всех натуральных $1 \leqslant k \leqslant n$ число k^k делит 2009!.

Ответ 46. Ясно, что 47 не годится, потому что простое число, то есть этот сомножитель в 2009! внесут только 47, $2\cdot47$, $3\cdot47, \dots, 42\cdot47$, то есть 47 множителей не наберётся. Если $k \leqslant 44$, то $k^2 < 2009$, поэтому числа k, $2k$ $3k, \dots,$ k^2 будут входить в произведение 2009! явно, так что всё будет хорошо. Для чисел 45 и 46 вручную проверяется наличие среди чисел от 1 до 2009 45 чисел, кратных 5, 45 чисел, кратных 9, 46 чисел, кратных 2 и 46 чисел, кратных 23.

7) В каждой клетке шахматной доски стоит белый или чёрный король. Известно, что каждый король бьёт больше королей чужого цвета, чем своего. Может ли чёрных и белых королей быть не поровну?

Да. Например, можно поставить чёрного короля в угол, далее в этом углу угловой квадрат 2×2 забиваем белыми, квадрат 3×3 — чёрными и так далее. В самом конце в противоположном углу вместо белого короля ставим чёрного. Итого белых 35, чёрных 29.

8) В скачках участвуют три лошади. На одну из них ставки принимаются в отношении 1 : 4 (то есть, если лошадь приходит первой, поставленную на неё сумму возвращают и дают ещё 4 раза по столько, а если не первой, то ставка пропадает), на вторую 1 : 3 и на третью 1 : 1. У меня есть £100. Могу ли я так поставить, чтобы выиграть при любом исходе забега?

Да. Ставим £21 на первую, £26 на вторую и £51 на третью. И ещё £2 останется на мороженое.

9) Восемь команд играют турнир по футболу, каждая с каждой. Все матчи договорные: игроки договорились, что каждая команда в своем первом матче забьет 1 гол, во втором 2 гола, в третьем 3 и т. д., в последнем 7. Какое минимальное количество матчей в этом турнире может закончиться вничью?

Два. Первый и последний матч обязаны кончиться вничью. Остальные матчи можно сделать результативными. Проведём доказательство индукцией по числу команд. Для трёх очевидно. Пусть матч между k командами мы умеем организовывать. Рассмотрим $k+1$ команду. Исключим одну (A), между остальными проведём турнир так, что только первый и послелний матчи вничью. Теперь отменим последний матч (между B и C), попросим сыграть сначала B с A, потом чтобы все остальные, кроме C, сыграли с A, потом чтобы B и C сыграли между собой и, наконец, C и A сыграли (вничью). Можно проверить, что всё будет правильно.

10) Через середину боковой стороны трапеции проведите прямую, разбивающую его на два равновеликих четырехугольника.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD||BC$, $AD > BC$. Пусть N — середина AB. Выберем на AD точку K так, что $CK||AB$. Пусть M — середина CK. Тогда ломаная MND, очевидно, делит площадь трапеции пополам. Если теперь через M провести прямую, параллельную ND, до пересечения с CD в точке T, то NT — искомая прямая.

11) Докажите, что если число $\frac{b}{a(a+b)} + \frac{c}{b(b+c)} + \frac{a}{c(c+a)}$ целое, то число $\frac{a}{b(a+b)} + \frac{b}{c(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)}$ тоже целое.

Эти числа равны, в чём можно убедиться, вычитая одно из другого.

12) Точка D на катете AC прямоугольного треугольника ABC выбрана так, что высота CH этого треугольника делит отрезок BD пополам. Точка E на катете BC треугольника ABC выбрана так, что высота CF треугольника BCD делит отрезок DE пополам. Докажите, что $AB||DE$.

Проведём $DE'||AB$. Пусть M — середина AB. Тогда CM делит пополам DE'. Если мы покажем, что $CM \perp BD$, то останется только понять, что точка E из условия строится однозначно, чтобы заявить, что $E' = E$ и задача решена. Перпендикулярность же докажем так. Пусть N — середина BD. Тогда $MN||AD$ как средняя линия и тогда $MN \perp BC$. Тогда N — ортоцентр треугольника BMC и, стало быть, $BD \perp MC$.

13) Однажды архивистами была обнаружена обложка олимпиадной работы школьника. Самой работы не нашли, не сохранились и условия задач. На обложке стояли результаты трёх проверок:

1	2	3	4	5	6
$\mp$	$\pm$	$\pm$	$+$	$+/2$	$-$
$+$	$\mp$	$+/2$	$\pm$	$\mp$	$-$
$\mp$	$\mp$	$\pm$	$\pm$	$+$	$+/2$

Известно, что работу проверяли Иванов, Петров и Сидоров (неясно, в каком порядке). Известно также, что Иванов всегда правильно проверяет геометрические задачи, Петров если где и ошибётся, то только в геометрии, а Сидоров проверяет всё правильно, только он очень рассеянный и порой ставит оценки не в те колонки.

Восстановите результаты школьника.

Ясно, что школьник не решил задачу 6: если бы за неё действительно было $+/2$, то оба верхних проверяющих ошиблись, то есть один из них — Сидоров (ибо Иванов и Петров загалом не ошибаются). Но тогда у школьника минус за какую-то другую задачу, что противоречит тому, что хотя бы один из оставшихся членов жюри проверяет верно. При этом Сидоров не может быть третьим, так как он минус за 6-ю задачу хоть в какую-то колонку да поставил бы. Итак, Сидоров — один из первых двух проверяющих. Далее: первый проверяющий не Сидоров, ибо если бы так было, то это бы означало, что у школьника $+/2$ за 3-ю, а тогда школьник на $\pm$ решил только 4-ю, и непонятно, откуда "Сидоров" взял две таких оценки в своей строчке. Итак, Сидоров — второй. Тогда его оценки за задачи (вторая строчка) получаются такими (в правильном порядке): $\mp$, $\mp$, $\pm$, $+$, $+/2$, $-$. Это и есть результат школьника.

14) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BIC лежит на биссектрисе треугольника ABC, исходящей из вершины A.

Биссектриса, о которой речь в условии, это AI. Рассмотрим точку Q пересечения это й биссектрисы с описанной окружностью треугольника ABC. Пусть $\angle QAC = \angle QAB = \angle QCB = \alpha$, $\angle ACI = \angle ICB = \beta$. Тогда $\angle QIC = \angle QCI = \alpha + \beta$, откуда $QI = QC$. Аналогично, $QI = QB$. То есть, Q и есть искомый центр. Задача решена.

15) На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

Рассмотрим три числа: A — сумма расстояний до концов минутных стрелок в 12.00, B — сумма расстояний до центров часов, C — сумма расстояний до концов минутных стрелок в 12.30. Для каждых часов слагаемые этих сумм будут подчиняться неравенству о том, что сумма сторон треугольника превышает удвоенную медиану к третьей стороне. (Если какой-то из треугольников выродился, надо заменить 12.00 на другой момент времени, что нетрудно, портому что число "неудачных" моментов времени конечно.) Складывая 50 таких неравенств, получим, что $A + C > 2B$, откуда или $A > B$, или $C > B$, что и требовалось. Заметим, что правильность хода часов не требуется.