9 математический класс **16 октября 2009 года.**

Принцип Карно.

Принцип Карно. Следующее предложение практически очевидно, однако, отталкиваясь от него, можно получить достаточно глубокие результаты. Пусть дана точка A вне прямой PQ. Пусть точка A_1 — проекция точки A на эту прямую. Тогда $AP^2 - AQ^2 = A_1P^2 - A_1Q^2$. Доказательство моментально получается, если записать дважды теорему Пифагора: $AP^2 = AA_1^2 + A_1P^2$ и $AQ^2 = AA_1^2 + A_1Q^2$, а затем из первого равенства вычесть второе. Обратно, если данное равенство выполнено, то A_1 — проекция точки A. В самом деле, если проекцией служит не A_1, а A_2, то $A_1P^2 - A_1Q^2 = A_2P^2 - A_2Q^2$. Легко показать, что это означает совпадение A_1 и A_2. Обобщая сказанное, можно высказать такой ***принцип Карно:*** *Для заданных точек P и Q множество точек M таких, что число $MP^2 - MQ^2$ постоянно, предствляет собой прямую, перпендикулярную прямой PQ.*

Теорема Карно. Пусть на стороны треугольника ABC или на их продолжениях опущены перпендикуляры из трёх произвольных точек: из A_1 на прямую BC, из B_1 на прямую AC и из C_1 на прямую BA. Тогда *эти перпендикуляры пересекаются в одной точке если и только если $A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = 0$.*

Доказательство: пусть равенство верно. Перпендикуляры к BC и к AC не могут быть параллельны, поэтому они пересекаются в точке N. Но тогда в силу принципа Карно $C_1B^2 - C_1A^2 = A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = NB^2 - NC^2 + NC^2 - NA^2 = NB^2 - NA^2$. Отсюда $C_1N \perp AB$. Наоборот, если все три перпендикуляра пересекаются в точке N, то $A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = NB^2 - NC^2 + NC^2 - NA^2 + NA^2 - NB^2 = 0$.

> ***Лазар Карно****(1753 – 1823)— французский математик, инженер, государственный и военный деятель. Играл значительную роль в революционной Франции, был членом Комитета общественного спасения (где ведал перемещениями войск и обороной) и даже две недели занимал пост председателя Конвента. При Бонапарте был Министром обороны Франции. Его сын, Сади Карно, великий физик, основатель термодинамики. Внук, Мари Франсуа Сади Карно, с 1897 по 1894 годы был Президентом Франции.*

Пример: ортоцентр. Покажем, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Если A_1, B_1 и C_1 — основания высот, то имеем: $A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 + C_1A^2 - C_1B^2 = AB^2 - AC^2 + BC^2 - BA^2 + CA^2 - CB^2 = 0$.

Ещё пример. Три окружности, центры которых образуют треугольник, попарно пересекаются, каждые две в двух точках. Докажем, что три общие хорды пересекаются в одной точке. К треугольнику, образованному центрами и прямым-хордам применим теорему Карно. Указанный факт воспоследует из соотношения $R_1^2 - R_2^2 + R_2^2 - R_3^2 + R_3^2 - R_1^2 = 0$.

Степень точки. Пусть точка A лежит на прямой BC, где BC — диаметр окружности с центром O. Пусть через A проведена другая секущая, пересекающая окружность в точках P И Q. Тогда $AP \cdot AQ = AB \cdot BC = a^2 - R^2$, где $a = AO$, R — радиус окружности. В самом деле, спроектируем точку O на прямую PQ — проекция, точка O_1, будет серединой отрезка PQ. Тогда по принципу Карно, $a^2 - R^2 = AO^2 - PO^2 = AO_1^2 - PO_1^2 = (AO_1 - PO_1)(AO_1 + PO_1) = AP \cdot AQ$. Иными словами, произведение (направленных) отрезков секущих для данной точки и данной окружности равно $a^2 - R^2$, то есть зависит только от размера окружности и удалённости точки от её центра, но не от проведённой через точку секущей. Это число называется *степенью точки относительно окружности.* Для точки вне окружности оно положительно и может быть неограниченно большим, для точки на окружности равно 0, для точки внутри — отрицательно, но не менее, чем $-R^2$ (для центра). Для точки вне окружности удобно пользоваться тем, что её степень равна квадрату касательной, проведённой из неё к этой окружности.

Радикальная ось и радикальный центр. Пусть даны две неконцентрические окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2. Тогда точки с равными степенями относительно них, то есть такие M, что $MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$ могут быть охарактеризованы и равенством $MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 = const$, то есть по принципу Карно, образуют прямую, перпендикулярную линии центров окружностей. Эта прямая называется их *радикальной осью.* Для пересекающихся окружностей это прямая, содержащая общую хорду, для касающихся — общая касательная. По теореме Карно, если центры трёх окружностей не лежат на одной прямой, то их три попарные радикальные оси пересекаются в одной точке. Эта точка — *радикальный центр* этих трёх окружностей. Понятно, что точка пересечения общих хорд из ранее разобранного примера именно такова.

Важное соображение. Степень точки позволяет дать метрический, не связанный со вписанными углами критерий того, что четыре точки лежат на окружности. Если отрезки AB и CD (или же продолжения этих отрезков) пересекаются в точке E , то A, B, C, D лежат на одной окружности, если и только если $EA \cdot EB = EC \cdot ED$.