Комплексные числа – 2.

1. Синус и косинус.

Сегодня опять поговорим о комплексных числах. Напомним, что комплексное число — это $z = a + bi$, где $i^2 = -1$, также его можно отметить на плоскости, отложив a по оси X и b по оси Y.

В конце прошлой лекции мы поняли, что тригонометрическая запись не особенно удобна при сложении чисел. Но, может быть, произведение так удобно записать?

Вспомним, что такое тригонометрическая запись. Это запись вида $z = |z|(\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z)))$, где $arg(z)$ — угол между вещественной положительной полуосью и направлением на z. Для угла α из первой четверти мы знаем, что такое $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. А что же для z из других четвертей? А вот тут мы и определим настоящие sin и cos. Заметим, что если взять единичную окружность и такое z из первой четверти, чтобы оно лежало на этой окружности, то координатами z будут $\cos(argz)$ и $\sin(argz)$.

Определение . Пусть задано произвольное число z, $|z| = 1$, то есть z лежит на единичной окружности. Если $z = a + bi$ и $arg(z) = \alpha$, то положим $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha$.

Заметим, что справедлива формула $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. В силу сделанного выше замечания новое определение синуса и косинуса поддерживает старое, принятое для острого угла. Теперь мы можем вычислить синус и косинус любого угла.

Одна и та же точка может получиться при откладывании от вещественной полуоси разных углов. Возьмём, например, $\overline{z}$. Какой у него аргумент, $-\alpha$ или $360 - \alpha$? Мы договоримся, что $360 - \alpha$, хотя существенной разницы нет, так как всё равно понятно, о какой точке идёт речь. Однако, мы считаем, что *аргумент числа меняется в пределах [0,360).* Это всего лишь договорённость.

2. Умножение на число единичного модуля.

Итак, что же происходит при умножении? Давайте рассмотрим w, принадлежащее единичной окружности, то есть, $|w| = 1$. Рассмотрим такое преобразование: $z \to zw$. Понятно, что для любого комплексного z zw — тоже комплексное число, так что это будет какое-то преобразование плоскости. Какое именно?

Здесь полезно рассмотреть несколько про стых примеров.

Пример 1: $w = -1$. Нетрудно понять, что *умножение на* -1 *есть центральная симметрия относительно нулевой точки.*

Пример 2: $w = i$. Легко видеть, что это *поворот на* $90°$ *вокруг всё той же нулевой точки.* Точка z с аргументом φ переходит в точку zi с аргументом $\varphi + 90°$. (Здесь не совсем точно: ведь $\varphi + 90°$ может "перепрыгнуть" $360°$. Но мы не будем вычитать из полученного числа $360°$, "забыв" о договорённости насчёт значений аргумента.)

Перейдём к общему случаю. Пусть $z \longrightarrow zw$. Заметим, что нулевая точка неподвижна. Точка 1 переходит в w, поворачиваясь на угол $arg\ w$ вокруг нуля. Точка i переходит в iw, аргумент которой, как мы видели выше, равен $\varphi + 90°$. Это значит, что и i повернулась на угол $arg\ w$ вокруг нуля. Это не случайно: *умножение на w и есть поворот на угол $arg\ w$ вокруг нуля.* Почему так происходит? Во-первых, $z \longrightarrow zw$ — движение, то есть сохраняются расстояния между точками: $|z_1w - z_2w| = |w||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$. Во-вторых, три пробные точки — 0, 1 и i — при нашем движении смещаются так же, как и при повороте на угол $arg\ w$ вокруг нуля. Но есть известная теорема о том, что *движение определяется вершинами треугольника:* если два движения одинаково перемещают вершины треугольника, то это одно и то же движение, а не два разных. Доказательство этой теоремы мы поместим в конце лекции.

Итак, вот что мы получили: преобразование $z \longrightarrow zw$ при $|w| = 1$ есть поворот точки z на угол $arg\ w$ вокруг нуля. Это значит, что если $arg\ z = \varphi$ и $arg\ w = \psi$, то $arg(zw) = \varphi + \psi$ (с той же вольностью относительно значений аргумента — ситуация примерно такая же, как со сложением остатков, когда мы говорим, что остаток суммы равен сумме остатков по какому-нибудь модулю).

3. **Важные формулы тригонометрии.**

Иными словами, если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi, w = \cos\psi + i\sin\psi$, то $zw = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$. Но с другой стороны, можно непосредственно перемножить z и w и получить $zw = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + sin\varphi\cos\psi)$. Отсюда получаем $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$ и $\sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + sin\varphi\cos\psi$ — мощные формулы, на которых зиждется вся тригонометрия. В учебниках они называются *теоремами сложения.*

4. **Умножение на любое число.**

А что происходит при умножении на число, не обязательно равное по модулю единице? Если $|w| = r$, то $w = rw_1$, где $|w_1| = 1$. Тогда $z \longrightarrow zw$ есть $z \longrightarrow rzw_1$ то есть после поворота $z \longrightarrow zw_1$ выполняется ещё $z \longrightarrow rz$, а умножение на вещественное неотрицательное число просто растягивает все расстояния до нуля в r раз: аргумент не меняется, а модуль умножается на r. Такое растягивание называется *гомотетией*, а всё вместе — *поворотной гомотетией.*

Итак, *при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

5. **Формула Муавра.**

Из сказанного легко вытекает и формула, найденная математиком А. де Муавром в XVIII веке: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Формула Муавра позволяет легко возвести число в натуральную степень.

6. **Корни из единицы.**

И последнее на сегодня: найдём корни n-ой степени из единицы. Под *корнем n-й степени из числа a* мы понимаем *всякое такое число b, что $b^n = a$.* Если оставаться в области действительных чисел, то корнем из единицы будет только единица, а при чётных n ещё и -1. Иначе обстоит дело в области комплексных чисел. Если $z^n = 1$, то понятно, что $|z| = 1$ (ибо $|z^n| = |z|^n = 1$). Если положить, что $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то по формуле Муавра $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi = 1$. Значит $n\varphi = k\cdot 360°$, то есть $\varphi = \frac{k\cdot 360°}{n}$. Это число будет аргументом, если будет лежать в $[0\,;\,360°)$, то есть при $k = 0$, $k = 1$, …, $k = n-1$. Корней n-й степени из 1 будет ровно n, и они будут располагаться в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, причём одной из вершин всегда будет 1.

7. **Обещанное доказательство теоремы про три точки.**

Мы обещали объяснить, почему если два движения одинаково действуют на три вершины треугольника, то это одно и то же движение. Пусть это не так. Тогда сделаем такое хитрое двойное движение: сначала применим одно из наших движений, а потом — движение, обратное второму. Вершины нашего треугольника сначала куда-то сместятся, а потом вернутся на место. Оказывается, все точки поведут себя так же: сначала куда-то сместятся, а потом вернутся в прежнее положение. Это и будет означать совпадение движений: движение, обратное второму, будет обращать и первое, то есть оба движения одинаково переводят все точки. Так почему же все точки вернутся на своё место? Пусть какая-то точка A не поступила так, а перешла в B. Каждая вершина нашего треугольника находится на равном расстоянии от A и от B, потому что движения сохраняют расстояния. Но тогда все три вершины треугольника лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к отрезку AB. Противоречие.