9 математический класс **21 ноября 2009 года.**

Комплексные числа – 2. Упражнения с решениями.

Напомним, что комплексное число z изображается точкой на плоскости. Расстояние от z до начала координат — модуль $|z|$ этого числа, наименьший угол, на который надо повернуть (против часовой стрелки) действительную положительную полуось, чтобы она прошла через z, называется его аргументом ($arg\ z$). Если $|z| = r$, $argz = \varphi$, то $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Комплексные числа соответствуют векторам (радиус-векторам) из начала координат в эти точки и складываются как они. Расстояние между точками z и w равно $|z - w|$. Множество $|z - a| = R$ представляет собой окружность, а $|z - a| \leqslant R$ — круг с центром в комплексной точке a и действительным неотрицательным радиусом R.

Преобразование $z \longrightarrow z + w$ есть сдвиг на вектор w, преобразование $z \longrightarrow zw$ — поворот вокруг начала координат с растяжением — z поворачивается на угол $\arg\ w$ и удаляется от нуля в $|w|$ раз. (Говорят: при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.) Известная всем осевая симметрия тоже легко описывается: преобразование $z \longrightarrow \overline{z}$ есть симметрия относительно вещественной оси. Все известные нам движения и преобразования подобия естественно записываются в комплексных числах.

1) Докажите, что если $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то $\frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$.

По сути дело сводится к $z\overline{z} = |z|^2 = 1$.

2) Вычислите $(\sqrt{3} + i)^{123}$.

Это $i \cdot 2^{123}$. Надо применить формулу Муавра.

3) Докажите, что все корни n-ой степени из 1 записываются в виде: $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{n-1}$.

За ε обычно берут $\left(\cos\frac{360^\circ}{n} + i\sin\frac{360^\circ}{n}\right)$, хотя и некоторые другие корни на эту роль годятся.

4) Докажите, что сумма всех корней n-ой степени из 1 равна 0.

Решение основано на формуле $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.

5) Решите уравнение: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Надо домножить на $x - 1$. Получатся все корни 5-й степени из 1, кроме самой 1.

6) Какое геометрическое преобразование задано формулой: а) $z \longrightarrow \overline{z} - 2 + 3i$; б) $z \longrightarrow z(i + 1)$; в) $z \longrightarrow \frac{z}{i+1}$.

7) Рассмотрим множество точек z, таких, что $|z + 3 - 2i| = 2$. Какому условию удовлетворяют точки w, если $w = (3 + 4i)z - 2 - 3i$?

Ответ: $|z + 6i + 17| = 10$.

8) Докажите, что точки a, b, c лежат в вершинах правильного треугольника тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$.

Для вещественных чисел есть известное неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$, которое обращается в равенство только при $a = b = c$. Для комплексных чисел надо заметить, что если заменить a, b и c на $a + z$, $b + z$ и $c + z$, то справедливость равенства не изменится. То же будет и для замены a, b и c на az, bz и cz (при $z \neq 0$). Такими преобразованиями сведём a, b и c к 0, 1 и q, а потом решим квадратное уравнение и получим, что $q = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Это равносторонний треугольник. Но сделанные действия — преобразование подобия, поэтому и исходный тоже правильный.