

Разные задачи. Список №3. Срок сдачи до 31 декабря.

[Возможность сдать задачи 31 декабря не гарантируется :)]

1) Двадцать рыцарей надели двадцать плащей, и каждому плащ оказался короток. Тогда рыцари, сняв плащи, выстроились по росту. Самый высокий рыцарь взял себе самый длинный плащ, второй взял себе самый длинный плащ из оставшихся и т.д. Рыцарь самого маленького роста взял себе самый короткий плащ. Докажите, что и в этом случае каждому рыцарю плащ окажется короток.

2) $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых чисел a и b значения многочлена $P(a)$ и $P(b)$ отличаются на 1. Докажите, что a и b также отличаются на 1.

3) Решите уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ в целых числах, отличных от 1.

4) Два угла пересекаются в четырёх точках, являющихся вершинами вписанного четырёхугольника. Докажите, что точки пересечения биссектрис этих углов со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

5) На доске написаны числа 2, 5, 8 и 17. Вена может выбрать любые три числа a , b , c из имеющихся на доске и написать на доске числа $a(b+c)$, $b(a+c)$ и $c(b+a)$ (все старые числа остаются). Вена хочет получить когда-нибудь число 2^{2010} . Удастся ли ему это?

6) В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для любых трех машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все четыре машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

7) Три окружности радиуса 1 проходят через точку P , а также попарно пересекаются в точках A , B и C . Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC .

8) Учитель Иван Иванович и школьник Семён живут в одном подъезде рядом с трамвайной линией. Утром они выходят из дома одновременно. Семён бежит к ближайшей трамвайной остановке со скоростью 11 км/ч, а Иван Иванович идёт к другой остановке со скоростью 6 км/ч. Тем не менее Иван Иванович приходит точно со звонком, а Семён вечно опаздывает. Какова максимальная скорость трамвая (выраженная целым числом километров в час)? Считайте, что у школы есть трамвайная остановка, а трамваи ходят регулярно и часто.

9) В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14-ти слонов). Найдите вес каждого из 15-ти слонов.

10) Таблица 5×5 как-то заполнена числами от 1 до 25. Разрешается поменять местами соседние числа в одной строке, если правое больше левого и соседние числа в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, отличающуюся от исходной только тем, что числа в клетках b_2 и d_4 поменяны местами?

11) Храбрый Портняжка утверждает, что умеет любой треугольник разрезать на две части так, что из этих частей потом можно сложить не только треугольник, но и четырёхугольник, и даже пятиугольник. Может ли он быть прав?

12) При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

13) Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники ABD и ACD , касающихся соответственно отрезков BD и CD , также равны.

14) Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Окружность, проходящая через точки O_1 , O_2 и A , вторично пересекает окружность S_1 в точке D , окружность S_2 — в точке E , а прямую AB — в точке C . Докажите, что $CD = CB = CE$.

15) На бесконечном белом листе клетчатой бумаги несколько клеток окрасили в чёрный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать несколько квадратов так, что все клетки будут вырезаны, и в каждом вырезанном квадрате чёрные клетки будут составлять от 20% до 80% площади.