9 математический класс **1 декабря 2009 года.**

Разные задачи. Список №3. Срок сдачи до 31 декабря.

1) Двадцать рыцарей надели двадцать плащей, и каждому плащ оказался короток. Тогда рыцари, сняв плащи, выстроились по росту. Самый высокий рыцарь взял себе самый длинный плащ, второй взял себе самый длинный плащ из оставшихся и т.д. Рыцарь самого маленького роста взял себе самый короткий плащ. Докажите, что и в этом случае каждому рыцарю плащ окажется короток.

Решение. Индукция по числу рыцарей. Для одного рыцаря очевидно. Пусть мы доказали утверждение для n рыцарей. Рассмотрим $(n+1)$ рыцарей. Пусть самый длинный плащ у рыцаря A, он ему короток, а тогда он короток и самому высокому рыцарю B. Попросим A и B поменяться плащами и удалим B с самым длинным плащом. Останется n рыцарей, удовлетворяющих условию задачи (рыцарю A достался в ходе обмена не самый длинный плащ, так что он ему короток, ведь ему до обмена был короток даже самый длинный!). Для них утверждение доказано, добавление рыцаря B завершит шаг индукции.

2) $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых чисел a и b значения многочлена $P(a)$ и $P(b)$ отличаются на 1. Докажите, что a и b также отличаются на 1.

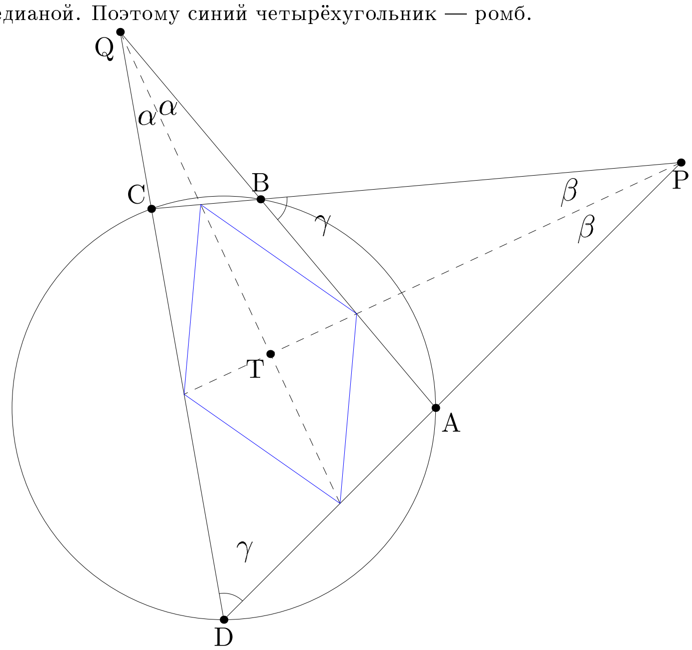
Решение. Поскольку $P(a) - p(b)$ делится на $a - b$, то $a - b$ будет делить единицу, то есть $a - b = \pm 1$, что и требовалось.

3) Решите уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ в целых числах, отличных от 1.

Ответ: (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3) и все решения, получающиеся из них перестановками, всего 10 решений. Решение. Поскольку $\frac{1}{k} < \frac{1}{2}$ при целых $k \neq 1$, имеем $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 1$, поэтому $z > 0$. Аналогично, все остальные переменные — натуральные числа. Можно считать, что $1 < x \leqslant y \leqslant z$. При $x > 3$ получим $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, то есть $x = 3$ или $x = 2$. Первое предположение приводит к решению (3, 3, 3), если же $x = 2$, то $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Аналогично показываем, что $2 \leqslant y \leqslant 4$ и получаем два остальных решения.

4) Два угла пересекаются в четырёх точках, являющихся вершинами вписанного четырёхугольника. Докажите, что точки пересечения биссектрис этих углов со сторонами четырёхугольника являются вершинами ромба.

Решение. Введём обозначения углов как на чертеже. Складывая углы четырехугольника $PBQD$, получим $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 180^\circ = 360^\circ$. Отсюда $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. Теперь, складывая углы четырёхугольника $PBQT$, найдём, что $\angle QTP = 90^\circ$. Итак, диагонали синего четырёхугольника перпендикулярны, а кроме того делятся точкой пересечения пополам, потому что высота, совпадающая с биссектрисой, совпадает и с медианой. Поэтому синий четырёхугольник — ромб.



5) На доске написаны числа 2, 5, 8 и 17. Веня может выбрать любые три числа a, b, c из имеющихся на доске и написать на доске числа $a(b+c)$, $b(a+c)$ и $c(b+a)$ (все старые числа остаются). Веня хочет получить когда-нибудь число 2^{2010}. Удастся ли ему это?

Ответ: нет. Решение. Все числа на доске в любой момент дают остаток 2 при делении на 3, а 2^{2010} нет.

6) В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для любых трех машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все четыре машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

Решение. Достаточно решить задачу для случая, когда самый медленный гонщик стоит на месте в точке старта, а остальные (назовем их Петя, Вася и Коля) едут со скоростями, уменьшенными на скорость самого медленного; при таком изменении условия моменты встреч гонщиков останутся неизменными.
Пусть до первой встречи с Васей в точке старта Петя проехал a кругов, а с Колей — b кругов. Тогда Петя будет встречаться на старте с Васей через каждые a кругов, а с Колей — через каждые b кругов, и через ab Петиных кругов в точке старта окажутся все трое.

7) Три окружности радиуса 1 проходят через точку P, а также попарно пересекаются в точках A, B и C. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

Ответ: 1. Решение. Пусть эти окружности имеют центры O_a, O_b и O_c (при этом каждая из точек A, B и C не лежит на окружности с одноимённым центром). Тогда O_bCBO_c — параллелограмм, поэтому BO_b и CO_c пересекаются в их общей середине M. Аналогично показвается, что M ещё и середина AO_a. Это значит, что Z_M переводит треугольник $O_aO_bO_c$ в ABC, а его единичную описанную окружность (с центром в P) — в единичную описанную окружность треугольника ABC.

8) Учитель Иван Иваныч и школьник Семён живут в одном подъезде рядом с трамвайной линией. Утром они выходят из дома одновременно. Семён бежит к ближайшей трамвайной остановке со скоростью 11 км/ч, а Иван Иваныч идёт к другой остановке со скоростью 6 км/ч. Тем не менее Иван Иваныч приходит точно со звонком, а Семён вечно опаздывает. Какова максимальная скорость трамвая (выраженная целым числом километров в час)? Считайте, что у школы есть трамвайная остановка, а трамваи ходят регулярно и часто.

Ответ: 26 км/ч. Решение. Пусть от подъезда до ближайшей остановки a км, до следующей (в сторону школы) — b км, скорость трамвая v км/ч. Тогда Семён бежит $\frac{a}{11}$ ч и едет $\frac{a+b}{v}$ ч до той остановки, где садится Иван Иваныч. Учитель же добирается до неё за $\frac{b}{6}$ ч и ...успевает на более ранний трамвай! Итак, $\frac{b}{6} < \frac{a}{11} + \frac{a+b}{v} < \frac{a}{11} + \frac{2b}{v}$. (Второе неравенство получено из условия $a < b$.) Теперь имеем $\frac{1}{6} < \frac{1}{11} + \frac{2}{v}$, откуда $v < \frac{132}{5}$, из чего находится ответ. Разумеется, можно подобрать для $v = 26$ значения a и b.

9) В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14-ти слонов). Найдите вес каждого из 15-ти слонов.

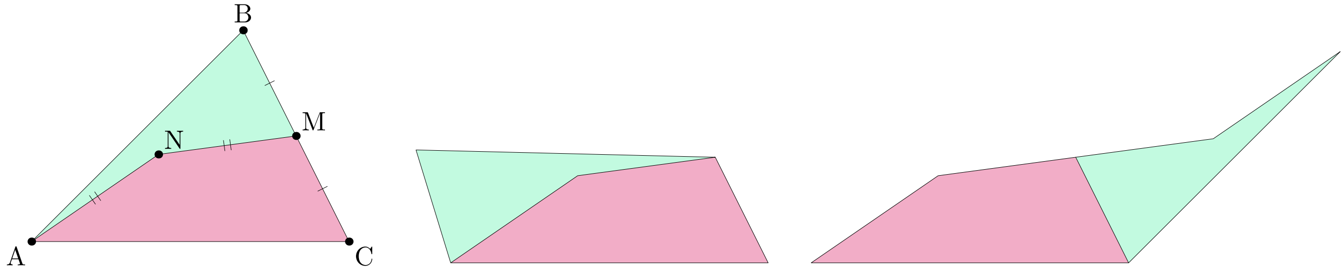
Ответ: все слоны весят по 5 тонн. Решение. Если масса правого слона отличается от 5 т на x кг, то масса второго отличается от 5 т на $2x$ кг, третьего — на $4x$ кг и так далее. Масса левого слона будет отличаться от 5 т на $2^{14}x$ кг, что больше 10 т даже при $x = 1$ кг. Тогда этот слон будет иметь либо отрицательную массу, либо превышающую 15 т, что невозможно.

10) Таблица 5×5 как-то заполнена числами от 1 до 25. Разрешается поменять местами соседние числа в одной строке, если правое больше левого и соседние числа в одном столбце, если нижнее больше верхнего. Можно ли с помощью таких операций получить таблицу, отличающуюся от исходной только тем, что числа в клетках $b2$ и $d4$ поменяны местами?

Нет. Заметим, что сумма чисел в любом прямоугольнике, левый верхний угол которого есть $a5$, может от таких операций только расти. Однако хотя бы в одном прямоугольнике — с правым нижним углом $c2$ или с правым нижним углом $d3$ — она, очевидно, уменьшится.

11) Храбрый Портняжка утверждает, что умеет любой треугольник разрезать на две части так, что из этих частей потом можно сложить не только треугольник, но и четырёхугольник, и даже пятиугольник. Может ли он быть прав?

Да. Приведём пример подобного разреза. Пусть BC — наименьшая сторона треугольника, AM — медиана к ней, N — такая точка внутри треугольника, что $NA = NM$. Тогда можно провести разрез по ломаной ANM и сложить четырёхугольник и пятиугольник (см. рисунки). Четырёхугольник не выродится в треугольник из-за того, что $AB \neq BM$ (это оттого, что $AB \geqslant BC$).



12) При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

Ответ: при n, не кратном трём. Решение. Чтобы многочлен делился на $x^2 + x + 1$ необходимо и достаточно, чтобы его корни были корнями этого многочлена. Корнями $x^2 + x + 1$ служат числа ε b ε^2, где ε — корень третьей степени из 1, не равный 1. Если n делится на 3, то $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^{2n} = 1$, так что такие n не годятся. Иначе же ε^n и ε^{2n} — те же ε b ε^2, только, возможно, в другом порядке. Их сумма с единицей, как известно, равна нулю.

13) Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники ABD и ACD , касающихся соответственно отрезков BD и CD , также равны.

Из условия следует, что у вписанных окружностей есть общая касательная, параллельная BC. Сделаем гомотетию с центром в A и таким коэффициентом, чтобы эта касательная перешла в BC. При этом вписанные окружности, очевидно, перейдут в упомянутые в задаче вневписанные окружности, разумеется, равного радиуса.

14) Окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Окружность, проходящая через точки O_1 , O_2 и A , вторично пересекает окружность S_1 в точке D , окружность S_2 — в точке E , а прямую AB — в точке C. Докажите, что $CD = CB = CE$.

Ясно, что $AB \perp O_1O_2$. По формуле угла между хордами полусумма дуг AO_1 и CO_2 равна $90°$, равно как и полусумма дуг O_2A и O_1C. Отсюда вытекает, что дуги DC и CE равны, то есть C — середина дуги DE и $CD = CE$, что частично решает задачу. Далее, аналогично доказывается, что продолжения отрезков DB и EB проходят через середины дуг EA и AD, то есть через O_2 и O_1 соответственно. Тогда B — ортоцентр треугольника O_1O_2C. По известной задаче его образ при симметрии относительно любой стороны попадает на описанную окружность, то есть при симметрии относительно, допустим, CO_1, B переходит в D. Поэтому $CB = CD$ и задача полностью решена.

15) На бесконечном белом листе клетчатой бумаги несколько клеток окрашено в чёрный цвет. Докажите, что из этого листа можно вырезать несколько квадратов так, что все клетки будут вырезаны, и в каждом вырезанном квадрате чёрные клетки будут составлять от 20% до 80% площади.

Рассмотрим квадрат $2^n \times 2^n$, содержащий все чёрные клетки, но занятый ими менее чем на 20%. Разобьём его на четыре квадрата. В каждом менее 80% площади закрашено. Если ещё и не менее 20%, то вырежем его. Если квадрат бел, забудем про него. Если же там менее 20%, но что-то чёрное имеется, снова разрежем на 4 квадрата. Процесс остановится, поскольку квадрат 2×2 либо закрашен не менее чем на 20%, либо белый.