Многочлены – 1.

1. Несколько определений.

Одночлен (от переменной x) есть выражение вида kx^n, где k — ненулевое комплексное, n — целое неотрицательное число.

Степенью одночлена называется n — степень переменной x в этом одночлене.

Многочлен (ненулевой, от переменной x) есть сумма одного или нескольких одночленов от этой переменной.

Многочлены можно складывать, вычитать и умножать.

Степенью многочлена называется максимальная из степеней его одночленов (обозначается deg).

Помимо того, что многочлен есть формальное выражение (сумма одночленов), его можно понимать как функцию, сопоставляющую каждому $z \in \mathbb{C}$ результат подстановки z вместо x в многочлен и выполнения всех умножений и сложений.

Нулевой многочлен не есть сумма одночленов. Как функция, он отображает любое комплексное число в 0. Как выражение, условно записывается также числом 0 и играет роль нуля в алгебре многочленов. Для любого многочлена P считается, что $0 + P = P$ и $0 \cdot P = 0$. Степень нулевого многочлена не определена, хотя удобно условно считать её равной $-\infty$ ("минус-бесконечность").

При перемножении многочленов их степени складываются (а $-\infty$ в сумме с любым числом снова даёт $-\infty$).

2. Деление с остатком.

Многочлены можно делить друг на друга с остатком. Для любой пары многочленов P и ненулевого Q определена (причём однозначно) пара D (неполное частное) и R (остаток), что:

$$P = QD + R; \quad \deg R < \deg Q.$$

Существование такой пары почти очевидно. Действительно, проведём индукцию по разности степеней P и Q. Если $\deg P < \deg Q$, то $D = 0$, $R = Q$. Пусть при $\deg P - \deg Q \leqslant k$ неполное частное и остаток определены. Рассмотрим случай $\deg P = \deg Q + k + 1$. Q можно представить в виде:

$$P = P_0 + kx^n; \quad n = \deg P,\ \deg P_0 < n.$$

Заметим, что $\deg(kx^n - lx^{k+1}Q) < n$ для некоторого l (равного отношению k к коэффициенту при старшем члене Q). Для $(P_0 + kx^n - lx^{k+1}Q)$ найдутся по предаоложению индукции неполное частное D_0 и остаток R. Имеем:

$$P = P_0 + kx^n - lx^{k+1}Q + lx^{k+1}Q = (D_0 + lx^{k+1})Q + R.$$

Отсюда неполное частное $D = D_0 + lx^{k+1}$.

Единственность неполного частного и остатка докажите самостоятельно.

3. Корни и теорема Безу.

Число a называется *корнем* многочлена $P(x)$, если $P(a) = 0$.

Число a называется *корнем кратности* n многочлена $P(x)$, если n — целое неотрицательное число и P делится нацело на $(x-a)^n$. Заметим, что любое число является корнем нулевой кратности любого многочлена.

Теорема Безу. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда оно является его корнем натуральной кратности. Иными словами, $P(a) = 0$ если и только если найдётся натуральное n, что $P(x) \vdots (x-a)^n$.

Доказательство. В обратную сторону очевидно: если $P(x) \vdots (x-a)^n$, то $P(x) = Q(x)(x-a)^n$ и $Q(a) = 0$. Теперь пусть $P(a) = 0$. Разделим $P(x)$ на $(x-a)$ с остатком. Степень этого остатка должна быть меньше 1, то есть остаток — некоторое число. Имеем: $P(x) = Q(x)(x-a) + r$. Подставим в это равенство $x = a$. Получим $P(0) = r$. Но по условию $P(0) = 0$, поэтому $r = 0$, то есть P делится на $(x-a)$ нацело.

Иногда теорему Безу формулируют и так: остаток от деления $P(x)$ на $(x-a)$ равен $P(a)$.

Утверждение. Пусть a — корень многочлена P ненулевой кратности n, $P = (x-a)D$. Тогда a является корнем D кратности $n-1$, кратности всех остальных чисел как корней D равны кратностям этих чисел как корней P.

Доказательство. Пусть b — корень D кратности m. Тогда выполнено:

$$D = (x-b)^m D_0; \quad D = (x-b)^{m+1} D_1 + R, \ R \neq 0.$$

Для P выполнено:

$$P = (x-b)^m (x-a) D_0; \quad P = (x-b)^{m+1} (x-a) D_1 + (x-a) R.$$

При $b = a$ утверждение выполнено. При $b \neq a$ необходимо проверить, что (x-a)R не делится на $(x-b)^{m+1}$. Вспомним, что $R = (x-b)^m (D_0 - (x-b) D_1)$. Из того, что $\deg R \leqslant m$, имеем $R = k(x-b)^m$, k — ненулевое число. Воспользуемся этим:

$$(x-a)R = k(x-a)(x-b)^m = k(x-b)^{m+1} + (b-a)k(x-b)^m.$$

При $b \neq a$ имеем ненулевой остаток. Утверждение полностью доказано.

Следствие 1. Многочлен степени n не может иметь более n корней с учётом их кратностей.

Следствие 2. (теорема Виета) Пусть многочлен P степени n *приведённый* (то есть имеет коэффициент 1 в одночлене старшей степени) и у него n корней $x_1, \ldots x_n$. Тогда коэффициент при x^{n-k} в этом многочлене равен $(-1)^k \sigma_k$, где σ_k есть сумма всевозможных произведений неупорядоченных наборов k корней.

Например, многочлен третьей степени $P = x^3 + ax^2 + bx + c$ с корнями x_1, x_2, x_3 можно представить в виде:

$$P = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3.$$

4. **Основная теорема алгебры.**

Любой многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет корень (комплексный), а следовательно имеет ровно n корней (с учётом кратностей). Это фундаментальное утверждение называется *основной теоремой алгебры.* Оно доказывается непросто, и мы пока примем его на веру.