

## Многочлены — 3. Разбор задач.

1) а) Остатки от деления многочлена  $P(x)$  на  $x + 1$  и  $x - 1$  соответственно равны 15 и 43. Какой остаток даёт этот многочлен при делении на  $x^2 - 1$ ?

Ответ:  $14x + 29$ . Пусть  $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$ . Подстановкой  $x = 1$  и  $x = -1$  получаем, что  $a + b = 43$  и  $b - a = 15$ . Отсюда  $a = 14$ ,  $b = 29$ .

б) Придумайте какой-нибудь многочлен  $P(x)$  из задания 1 а). Какую степень он может иметь? Опишите все такие многочлены.

Ответ: Например,  $14x + 29$ . Степень может быть любая не ниже первой. Общий вид:  $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + 14x + 29$ .

в) Придумайте многочлен, который при делении на  $(x - 1)$  даёт остаток 1, при делении на  $x$  даёт остаток 3, при делении на  $(x + 1)$  даёт остаток 6.

Ответ: Например,  $x^2 - 3x + 3$ .

2) Решите уравнение ( $a, b$  и  $c$  — различные числа):

$$а) a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

Ответ: все числа. Попробуем угадать корни. После того, как три корня "квадратного" уравнения будут угаданы, задача решится.

$$б) a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Правая часть тождественно равна  $x$ , а левая, аналогично, равна  $x^2$ . Ответ: 0 и 1.

3) а) Напишите многочлен, равный нулю в точках  $a, b$  и  $c$  и равный 1 в точке  $d$ .

$$\text{Ответ: } \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

б) Напишите многочлен, равный нулю в точках  $a, b$  и  $c$  и равный  $D$  в точке  $d$ .

$$\text{Ответ: } \frac{D(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

в) Напишите многочлен, равный  $A, B, C, D$  соответственно в точках  $a, b, c$  и  $d$ .

Ответ получается суммированием ответов на 4 вопроса типа б).

г) Обобщите предыдущую задачу на произвольное число точек (интерполяционный многочлен Лагранжа).

4) Корабль плывёт по прямой с постоянной скоростью мимо небольшого острова. В 12, 14 и 15 часов расстояния от корабля до острова равнялись 7, 5 и 11 км соответственно. Каким было расстояние до острова в 13 часов?

Ответ: 1 км. Квадрат расстояния квадратично зависит от времени (теорема Пифагора), эту зависимость по трём точкам можно найти.