

## Инверсия — 2. Разбор задач.

1) Докажите, что угол между пересекающимися окружностями (или окружностью и прямой) не зависит от выбора точки пересечения.

Это очевидно.

2) Две окружности касаются. В какую фигуру они перейдут при инверсии относительно точки касания?

В пару параллельных прямых. Надо подчеркнуть сохранение нулевого угла.

3) Прямая  $l$  проходит через центр окружности  $\gamma$ . Точка  $O$  лежит на  $\gamma$ , но не на  $l$ . При инверсии относительно  $O$   $l \rightarrow l'$  и  $\gamma \rightarrow \gamma'$ . Верно ли, что  $\gamma'$  проходит через центр  $l'$ ?

Да. Поскольку  $l \perp \gamma$ , то и  $l' \perp \gamma'$ . Так как  $\gamma'$  — это прямая, а  $l'$  — окружность, то перпендикулярность означает, что  $\gamma'$  содержит диаметр  $l'$ .

4) Две точки окружности инверсны друг другу. Докажите, что эта окружность инверсна сама себе (а значит, ортогональна окружности инверсии).

Пусть  $A$  и  $B$  инверсны друг другу точки окружности  $\gamma$ . Пусть  $(\gamma, \widehat{AB}) = \varphi$ . Тогда  $(\gamma', \widehat{AB}) = \varphi$ , так как  $(AB)$  инвариантна. Но окружностей, проходящих через  $A$  и  $B$  и образующих угол  $\varphi$  с  $(AB)$  только две:  $\gamma$  и  $S_{(AB)}(\gamma)$ , вторая не годится.

5) Даны две пересекающиеся окружности. Третья окружность ортогональна им обеим. Где может находиться её центр?

Ответ: на прямой, содержащей общую хорду, но не на этой хорде. Очевидно, что точки пересечения инверсны друг другу относительно третьей окружности. Достаточность достаточно очевидна.

6а) Две равные окружности пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что инверсия относительно окружности с диаметром  $AB$  переводит их друг в друга. Есть ли другая окружность с таким свойством?

Это очевидно. Другой нет — её роль играет линия центров (можно сказать о связи инверсии и отражения).

6б) Две неравные окружности пересекаются в двух точках. Постройте окружность, инверсия относительно которой переводит данные окружности друг в друга. Сколько решений имеет задача?

Ясно, что искомая окружность должна делить пополам угол между данными окружностями. Поскольку биссектрис две, то и окружностей две. Построение очевидно.