9 математический класс **1 января 2010 года.**

Всех поздравляем с наступившим Новым 2010 годом! Удач, радости, новых открытий!

Разные задачи. Список №4. Срок сдачи до 31 января.

1) По кругу написано несколько целых чисел. Каждое число равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 2010. Сколько чисел написано?

Ответ: может быть 3, 5, 15, 201, 335 или 1005 чисел. Решение. Ясно, что все числа неотрицательны. Пусть a — наибольшее из них. Тогда за ним следуют a и 0 в каком-то порядке. Если числа следуют в порядке a, a, 0, то далее идёт a, потом снова a, снова 0 и так далее. То же самое получается и во втором случае: a, a, 0, a, a, 0, ... Значит, всего чисел $3n$, а их сумма $2an = 2010$, то есть $an = 1005 = 3 \cdot 5 \cdot 67$. Отсюда ответ.

2) CD — биссектриса треугольника ABC. Вписанная окружность треугольника BCD и описанная окружность треугольника ABC концентричны. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 36°, 72°, 72°. Пусть Q — общий центр окружностей. Решение — счёт углов, основанный на том, что CD — биссектриса $\angle BCA$, BQ — биссектриса $\angle CBA$, CQ — биссектриса $\angle BCD$, а также на том, что треугольники AQB, CQB, AQC равнобедренные.

3) Сумма четырёх натуральных чисел равна 2010. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

Ответ: 602. Пример: $2010 = 602+602+602+201$. Решение. Ясно, что НОК кратен наибольшему числу, которое составляет более четверти от 2010, то есть более $502,5$. Если кратен хотя бы с коэффициентом 2, получается НОК больше тысячи. Значит, с коэффициентом 1, то есть НОК равен максимальному числу. Тогда наши числа в порядке невозрастания равны a, $\frac{a}{k_1}$, $\frac{a}{k_2}$, $\frac{a}{k_3}$, где $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3$. Наша цель в минимизации $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$. Приведённый выше пример соответствует $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 3$. Случай $k_3 = 2$ невозможен, ибо 2010 не делится на 7, а если положить хотя бы $k_2 = 2$, то сумма $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$ не превысит двойки, тогда как в примере она равна $2\frac{1}{3}$.

4) Докажите, что если сторона остроугольного треугольника видна под одинаковым углом из его точки пересечения медиан, точки пересечения биссектрис и точки пересечения высот, то этот треугольник равносторонний.

Решение. Пусть речь идёт о стороне BC, а угол треугольника, противолежащий ей, равен α. Тогда из точки пересечения высот сторона видна под углом $180^\circ - \alpha$, а из токи пересечения биссектрис — под углом $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Оба эти факта несложно доказываются и хорошо известны. Приравнивая, находим, что $\alpha = 60^\circ$.
Теперь рассмотрим медианы CC' и BB', пересекающиеся в точке M под углом 60°. Поскольку $MB'AC'$ вписан, имеем $BM \cdot BB' = BC' \cdot BA$. Можно считать, что $BM = 2x$, $MB' = x$ (свойство медиан), а также $BC' = C'A = y$. Тогда имеем $6x^2 = 2y^2$, то есть $y = x\sqrt{3}$. Это означает, что $\angle BC'M = 90^\circ$. В самом деле, если бы это было не так, мы опустили бы из B перпендикуляр BK на прямую CC' и в треугольнике BMK с углом $\angle M = 60^\circ$ и гипотенузой $BM = 2x$ нашли бы катет $BK = x\sqrt{3}$. Это значит, что $K = C'$, то есть CC' — медиана и высота. То же доказываем и про BB', после чего задача решена.

5) Докажите, что $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{2009}{2010!} < 1$.

Решение. Заметим, что $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$. Применяя к каждому слагаемому в левой части эту формулу, приведём левую часть к виду $\frac{1}{1!} - \frac{1}{2010!}$, что меньше единицы.

6) Разность двух квадратных трёхчленов не имеет действительных корней, а каждый из них корни имеет. Докажите, что сумма этих квадратных трёхчленов имеет действительные корни.

Решение. Разность не имеет корней, значит она постоянного знака, то есть или положительна, или отрицательна для всех x. Если бы и сумма корней не имела, то она тоже была бы постоянного знака. При этом если бы они обе (сумма и разность) были бы одного знака, то такого же знака был один из квадратных трёхчленов (равный их полусумме), а если бы они были разных знаков, то одного знака был бы другой трёхчлен (равный их полуразности). В любом случае, имеем противоречие.

7) Квадратный пол со стороной 4 м разделён на 16 клеток со стороной 1 м. На полу лежит 13 ковриков, каждый из которых накрывает ровно две клетки. Коврики застилают пол целиком. Докажите, что можно убрать один коврик так, что пол останется застеленным.

Решение. Если ни один коврик убрать нельзя, значит для каждого из 13 ковриков есть клетка, которую покрывает только он. Оставшиеся три клетки тоже как-то покрыты этими 13-ю ковриками. Отсюда видно, что хотя бы одна из этих трёх клеток покрыта 5-ю ковриками. Но это значит, что из этих пяти два непременно совпадают, и один можно убрать — противоречие.

8) На полянке лежат в ряд, касаясь друг друга, 2010 одинаковых круглых брёвен, сплошь вымазанных дёгтем. В ложбинку между первыми двумя кладут такое же, но чистое бревно. Потом его перекатывают без проскальзывания через другие брёвна, пока оно не окажется в ложбинке между последними брёвнами. Какая часть боковой поверхности бревна измажется дёгтем?

Ответ: половина. Решение. Разделим сечение катящегося бревна на 6 равных дуг. Легко видеть, что измажется ровно три дуги (несоседние).

9) Найдите все натуральные числа-палиндромы, которые остаются палиндромами после прибавления к ним числа 2010. (Число называется палиндромом, если оно слева направо и справа налево читается одинаково.)

Ответ: 212. Решение. Перебор по длине числа. Однозначные и двузначные палиндромы перебираются легко, ответов не находится. Среди трёхзначных годятся только $\overline{2a2}$, которые также перебираются и дают ответ. Сумма числа 2010 с $\overline{abba}$ оканчивается на a, а начинается с $a+2$ или $a+3$, что не годится. Сумма числа 2010 с $\overline{abcba}$ должна иметь цифрой десятков $b+1$, а тысяч $b+2$ (перехода через десяток в этом разряде не будет), это не подходит. Сумма числа 2010 с $\overline{abccba}$ в разряде сотен будет иметь c, а тысяч — $c+2$, это не годится. Наконец, если палиндром имеет 7 и более знаков, то на второй с начала разряд должна переноситься единица, тогда в третьем с начала разряде должна стоять девятка, но после сложения там окажется 0, а в разряде сотен — 9, снова будет несовпадение.

10) При каких целых a уравнение $x^2+ax+a=0$ имеет целый корень?

Ответ: при $a=0$ и $a=4$. Решение. Если один из корней p целый, то и второй, $q=-a-p$, тоже целый. (Возможно, он совпадает с первым.) Из теоремы Виета следует, что $p+q=-a$ и $pq=a$. Это значит, что $1+p+q+pq=1$, то есть $(1+p)(1+q)=1$. Отсюда либо $p=q=0$ (и тогда $a=0$), либо $p=q=-2$ (и тогда $a=4$).

11) На краю круглого стола Никита разложил 2010 конфет так, что между любыми соседними конфетами были равные промежутки. Только он отвернулся, как Миша стащил 1205 конфет. Докажите, что Никита сможет из оставшихся конфет выбрать три, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

Решение. До действий Миши на столе было $\frac{2010}{5}=402$ непересекающихся набора по 5 конфет, лежащих в вершинах правильного пятиугольника. Миша хотя бы в одном пятиугольнике сохранил три вершины (иначе бы он утащил как минимум $3\cdot 402=1206$ конфет. Но любые три вершины правильного пятиугольника являются вершинами равнобедренного треугольника.

12) В школе число мальчиков равно числу девочек. Ни в каком классе не учится больше, чем полшколы. Все ученики школы пришли на дискотеку. Диджей объявил белый танец. Докажите, что каждая девочка сможет пригласить мальчика из другого класса.

Решение. Индукция по числу пар учеников. Если в школе учатся только двое, очевидно. Пусть мы решили задачу для случая, когда в школе n мальчиков и n девочек. Рассмотрим теперь случай, когда и тех и других по $n+1$. Назовём класс "переполненным", если в нём $n+1$ ученик. Ясно, что переполненных классов не более двух. Если их ровно два, то все девочки, очевидно, найдут себе партнёров. Если такой класс один, и в нём учатся только мальчики, тогда все девочки, очевидно, смогут танцевать с ними. Если же в переполненном классе есть девочка, тогда вне этого класса есть мальчик, и девочка сможет его пригласить. Отправим их танцевать, а заодно исключим из школы (за аморальное поведение :). Тут можно применить предположение индукции — мы разрушили единственный переполненный класс, и теперь в каждом классе не более n учеников. Разумеется, возможно, что переполненных классов нет вовсе — тогда берём любую девочку, ищем ей партнёра в другом классе (он, понятно, есть), и исключаем эту пару.

13) Из вершины B параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры на прямые AD, CD и AC. Докажите, что их основания и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат на одной окружности.

Решение. Приведём рассуждение для случая, когда B — тупой угол, остальные отличаются незначительно. Пусть данные в условии перпендикуляры есть BC_1, BA_1, BD_1 соответственно, O — центр параллелограмма, острый угол параллелограмма равен α. Тогда надо показать, что $\angle B_1D_1A_1=\angle B_1OA_1$. В самом деле, $\angle B_1D_1A_1=\angle A+\angle C=2\alpha$, что следует из вписанности четырёхугольников ABD_1C_1 и BCA_1D_1. Угол же $\angle B_1OA_1$ центральный в описанной окружности четырёхугольника BA_1DC_1, так что он равен $2\angle C_1BA_1=2(180^\circ-\angle D)=2\alpha$.

14) Дана белая доска 2010×2010 клеток. Двое по очереди закрашивают клетки синей краской. Начинающий игру каждым своим ходом закрашивает квадрат 2×2, а второй игрок — "уголок" из трёх клеток. Повторно красить клетки нельзя. Проигрывает не имеющий хода. Кто, первый или второй, победит независимо от игры соперника?

Решение. Победит второй. После любого хода первого он находит в одном из углов доски не затронутый первым прямоугольник 2×3 и красит в нём уголок, не содержащий угловой клетки доски и смежных с ней клеток. При этом в избранном им прямоугольнике 2×3 останется уголок, ни одну из клеток которого первый никогда не закрасит. Это резерв второго игрока. Далее он может ходить как угодно, не затрагивая резерва. Если при этом у первого ходы кончатся, первый проиграл. Если ходы кончатся у второго, он красит резервный уголок. После этого первому некуда ходить, ведь если бы у него оставался бы ход, то первый мог бы не трогать резерв.

15) Четыре окружности расположены по кругу так, что каждые две соседние пересекаются в двух точках (всего 8 точек пересечения — четыре "внешние" и четыре "внутренние"). Известно, что четыре внешние точки лежат на одной окружности, на которой лежат ещё и центры всех четырёх окружностей. Докажите, что четыре внутренние точки лежат в вершинах прямоугольника.

Решение. Лемма. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Пусть прямая O_1B вторично пересекает вторую окружность в точке C. Тогда O_1AO_2C вписан. В самом деле, $\angle O_1CA = \frac{1}{2}\angle BO_2A = \angle O_1O_2A$. Следствие: если описанная окружность треугольника O_1O_2A пересекает вторую окружность в точке C, то B лежит на O_1C.

Теперь решим задачу. Пусть точки пересечения окружностей (по кругу) A, B, C, B (внешние)и A_1, B_1, C_1, B_1 (соответствующие внутренние). Пусть центры окружностей (по кругу) O_1, O_2, O_3, O_4 (O_1 на дуге AB и так далее). По лемме $A_1 \in BO_4$ и $B_1 \in AO_2$. Тогда $\angle O_2O_4B = \angle O_2AB = \angle B_1A_1B$, поэтому $A_1B_1 || O_2O_4$. Аналогично про остальные стороны, поэтому $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм. Но к тому же $O_2O_4 \perp O_1O_3$, что сразу видно из формулы для угла между пересекающимися хордами. Значит, $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник.