Инверсия – 4. Разбор задач.

1) Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей, две из которых концентрические.

Решение. Центр искомой окружности принадлежит окружности, концентрической двум данным и равноудаленной от них, а ее радиус равен полуразности их радиусов. Кроме того, расстояние между центрами искомой окружности и третьей из данных равно сумме или разности их радиусов (а они известны).

2) Постройте центр инверсии, которая переводит непересекающиеся окружность и прямую в концентрические окружности.

Решение. Опустим из центра окружности O перпендикуляр OA на прямую, из основания перпендикуляра проведем касательную AM к окружности. Окружность с центром A и радиусом AM пересекает прямую OA в двух точках. Любая из них — искомая.

3) Три окружности имеют общую точку O и попарно пересекаются еще в трех точках A, B, C. Найдите сумму внутренних углов криволинейного треугольника ABC, образованного дугами этих окружностей.

Ответ. $180°$. *При инверсии с центром O криволинейный треугольник ABC перейдет в обычный треугольник $A'B'C'$, а углы сохранятся.*

4) Объясните, почему инверсия не является ни движением, ни преобразованием подобия.

5) **Изменение расстояний при инверсии.** Докажите, что расстояния между точками A и B и их образами A' и B' при инверсии с центром O и радиусом R связаны соотношением

$$A'B' = \frac{R^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$$

Решение. Если точки O, A, B неколлинеарны, то $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2$, поэтому треугольники OAB и $OA'B'$ подобны, следовательно, $A'B' = AB \cdot \frac{OA'}{OB} = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$. Случай коллинеарных точек несложен и малоинтересен.

Замечание. На первый взгляд формула может показаться бессмысленной, а ее запоминание малореальным. Но заметим, что множитель $\frac{R^2}{OA \cdot OB}$ показывает, что если обе точки A и B расположены вблизи центра инверсии, то расстояние между ними значительно увеличивается, если обе далеко за пределами окружности инверсии, то расстояние значительно уменьшается, а изменение расстояний вблизи окружности инверсии малозаметно.Если учесть еще и равноправие точек A и B, то более простой формулы придумать не удастся.

6) а) **Теорема Птолемея.** Докажите, что во вписанном в окружно сть четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

б) Докажите, что для любых четырех точек на плоскости имеет место неравенство $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$, причем равенство возможно лишь тогда, когда все точки лежат на одной прямой или окружности, и пара точек A и C разделяет пару точек B и D.

Решение. а) Рассмотрим инверсию с центром в вершине A. Описанная окружность перейдет в прямую, на которой точка C' окажется между B' и D'. Поэтому $B'D' = B'C' + C'D'$. Осталось трижды применить формулу изменения расстояний при инверсии и умножить получившееся равенство на $\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{R^2}$.

б) При той же инверсии вместо равенства получится нестрогое неравенство, причем равенство достигается лишь в указанном случае.

7) **Поризм Штейнера.** Пусть окружность γ_2 расположена внутри окружности γ_1. Пусть существует цепочка окружностей , каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_{n+1}), а также γ_1 и γ_2. Тогда для любой окружности T_1, касающейся γ_1 и γ_2, существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей.

Якоб Штейнер (1796-1863) родился в Швейцарии в крестьянской семье. В математике Штейнер был самоучкой. В возрасте двадцати лет он переехал в Германию, где и работал до конца жизни. Он впервые доказал, что треугольник с двумя равными биссектрисами - равнобедренный, что все геометрические построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, могут быть осуществлены с помощью одной линейки, если только нам дана хотя бы одна окружность и её центр. Штейнер говорил, что "расчёт заменяет мышление, а геометрия, напротив, это мышление укрепляет".

Решение. Переведем инверсией окружности γ_1 и γ_2 в концентрические.