**9 математический класс** **22 января 2010 года**

# Неравенства. Неравенство Коши.

Мы начинаем серию занятий, посвящённых доказательствам различных числовых неравенств. В сегодняшней лекции по умолчанию считается, что все переменные принимают неотрицательные значения.

1. **Неравенства о средних.**

Как вы хорошо знаете, *средним арифметическим* чисел $a$ и $b$ называется число $\frac{a+b}{2}$, а их *средним геометрическим* называется число $\sqrt{ab}$. Называются они средними потому, что расположены между $a$ и $b$, это нетрудно доказать. Знаете вы, конечно и неравенство о средних: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Оно доказывалось на уроке алгебры, и мы сейчас на доказательстве подробно останавливаться не будем. Напомним только, что равенство будет только при $a = b$.

Уже это несложное соотношение даёт возможность доказывать многие нетривиальные неравенства. Многие примеры у вас встречались на уроках, подборка упражнении приведена и в ГГЗ. Искусство применения неравенства о средних состоит в том, чтобы правильно выбрать, "что будет $a$ и что будет $b$". Также часто требуется складывать неравенства (это можно делать без ограничений) и перемножать их (а это, напомним, можно делать только если все части неравенств неотрицательны).

Приведём пример. Для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ докажите неравенство $abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$. Решение. Запишем число $a$ таким мудрёным способом: $a = \frac{a+b-c+a+c-b}{2}$. Применим неравенство о средних: $a = \frac{a+b-c+a+c-b}{2} \geqslant \sqrt{(a+b-c)(a+c-b)}$. Аналогично поступим для $b$ и для $c$: $b = \frac{b+a-c+b+c-a}{2} \geqslant \sqrt{(b+a-c)(b+c-a)}$ и $c = \frac{c+b-a+c+a-b}{2} \geqslant \sqrt{(c+b-a)(c+a-b)}$. Перемножая все три неравенства, получим требуемое. Найдите ошибку в этом рассуждении.

Ошибка в том, что мы не позаботились о неотрицательности чисел, к которым применяли неравенства о средних. Но доказательство можно спасти. Пусть, например, $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Тогда ясно, что $a+b-c > 0$ и $a+c-b > 0$. Если и $b+c-a \geqslant 0$, доказательство проходит. А если нет, то неравенство и так очевидно.

Среднее арифметическое и геометрическое — далеко не единственные примеры средних. Вам могло встречаться также *среднее гармоническое* $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ и *среднее квадратичное* $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Легко доказать (сделайте это самостоятельно), что $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Во всех этих неравенствах равенство будет наблюдаться в точности при $a = b$.

Вот довольно непростой пример использования одного из таких неравенств.

Докажите, что для положительных чисел $a$, $b$ и $c$ верно неравенство $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} \geqslant 2$. Решение. Поскольку надо оценивать корни, будем рассматривать их как средние геометрические. Так как надо оценивать сверху, воспользуемся неравенством о среднем геометрическом и среднем пропорциональном. Под корнем должно быть произведение — попробуем тривиальный вариант $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1}$. Получится: $\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1} \geqslant \frac{2}{\frac{b+c}{a}+1} = \frac{2a}{a+b+c}$. Делая так для всех трёх корней и складывая, получим требуемое. Вопрос: при каких $a$, $b$, $c$ достигается равенство? Ответ: ни при каких (а почему?). Ещё интересно, выражение слева может быть сколь угодно близко к двойке, или же неравенство можно усилить, поставив вместо двойки большее число?

2. **Неравенство о средних для трёх переменных.**

Неравенство, аналогичное неравенству о средних можно написать и для трёх чисел: $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$. Доказательство можно провести так. Положим $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Фактически нужно будет доказать, что $x^3+y^3+z^3-3xyz \geqslant 0$. Это можно сделать с помощью тождества $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$. Тождество нам уже встречалось при работе с корнями кубического уравнения. Обе скобки справа неотрицательны: одна по условию, а вторая в силу известного с уроков алгебры чудесного неравенства $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz$. Оно, кстати, выполняется для всех переменных, в том числе и отрицательных, а обращается в равенство только при $x = y = z$.

Приведём совсем простой пример: докажите, что $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$. Каждый легко сделает эту задачу сам.

Вот более сложный и интересный. Докажите, что из всех треугольников данной площади минимальный периметр у правильного.

Решение. Имеем: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$. Итак, $p \geqslant \sqrt{S}\sqrt[4]{27}$. Равенство только при $p-a = p-b = p-c$, то есть для правильного треугольника.

3. **Индукция и неравенства. Неравенство Бернулли.**

В ряде случаев переменных ещё больше, чем три. Например, $n$. Или произвольное $n$ участвует в неравенстве в качестве одной из переменных. При доказательстве таких неравенств может помочь метод математической индукции.

Вот произвольный простой пример: докажем, что $2^n > n$ для всех натуральных $n$. База: при $n = 1$ верно. Шаг: пусть доказано для всех $k \leqslant n$. Тогда $2^n > n$, откуда $2^{n+1} > 2n > n+1$ (последнее неравенство, очевидно, эквивалентно $n > 1$).

Приведём теперь пример довольно важного и часто применяемого неравенства — неравенства Бернулли.

> Даниил Бернулли (1700, Гронинген, Голландия – 1782, Базель, Швейцария) — выдающийся швейцарский математик голландского происхождения. Род Бернулли - уникальный в истории математики пример того, как члены одной семьи на протяжении нескольких поколений занимались математикой, достигая в ней значительных результатов. Математиками (и весьма знаменитыми!) в этой семье были, помимо Даниила, его отец Иоганн, братья Николай и Якоб, дядя Якоб, двоюродный брат Николай и сын Иоганн.
>
> Даниил Бернулли внёс значительный вклад почти во все области физики и математики. Его работы касаются алгебры, теории чисел, теории вероятностей, математического анализа, небесной механики, он вывел уравнение колебаний струны, основное уравнение гидродинамики, применил метод тригонометрических рядов (впоследствии названный методом Фурье) к решению дифференциальных уравнений. 10 раз удостаивался премии Парижской Академии наук за лучшие работы по математике и физике. Упомянутое в нашем курсе неравенство возникло в работе по теории пределов.

При любом натуральном $n$ и любом $x > -1$ верно *неравенство Бернулли*: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Доказательство по индукции: база $n = 1$ очевидна. Шаг: пусть доказано для всех $k \leqslant n$. Тогда $(1+x)^n > 1+nx$, что можно домножить на (положительное!) число $(1+x)$ и получится вот что: $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x+nx^2$, а поскольку $nx^2 \geqslant 0$, получается нужное неравенство. Попробуйте самостоятельно определить, когда неравенство Бернулли обращается в равенство. Объясните также, почему в доказательстве не получается просто воспользоваться биномом Ньютона и отбросить его лишние члены.

3. **Неравенство о средних для n переменных (неравенство Коши).**

Теперь приступим к обобщению неравенства о средних на $n$ переменных — знаменитому неравенству Коши.

Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789 – 1857), знаменитый французский математик, родился в Париже, в самый разгар Великой французской революции (за неделю до принятия знаменитой "Декларации прав человека и гражданина"). В 1807 Луи заканчивает Ecole Polytechnique, работает инженером на постройке военного порта в Шербуре и там пишет свои первые значительные работы по математике. В 1813 году Коши возвращается в Париж, в 1816 становится членом Парижской Академии Наук. Коши преподаёт в College de France и в Ecole Polytechnique до 1830 года, когда приход к власти Луи Филиппа вынуждает Коши, присягавшему на верность отстранённому от власти Карлу X, уехать из Франции. В эмиграции Коши живёт до 1838 года, после чего возвращается в Париж.

Математическое наследие Коши многопланово и значительно. Он считается по праву "отцом современного анализа". Коши является автором знаменитых, ставших классическими, учебников. Он работал также в области математической физики, теории упругости, оптики, теории дифференциальных уравнений, теории чисел. Упоминаемое неравенство было доказано Коши в 1821 году.

Неравенство Коши: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Это трудное неравенство было доказано Коши почти 200 лет назад. За это время было найдено немало разных его доказательств. Мы приведём два, использующие индукцию.

Первое доказательство. База при $n = 2$ общеизвестна. Шаг: пусть для $k \leqslant n$ неравенство доказано. Рассмотрим $k = n + 1$. Требуется доказать, что $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geqslant \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n+1}}$. Будем считать, что $a_{n+1}$ — наибольшее из всех $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\dots$, $a_{n+1}$. Положим $S_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ и, соответственно, $S_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$. Легко видеть, что $a_{n+1} \geqslant S_n$, поэтому можно считать, что $a_{n+1} = S_n + d$, где $d \geqslant 0$. Теперь представим $S_{n+1}$ в виде $S_{n+1} = \frac{nS_n + a_{n+1}}{n+1}$. Оценим $S_{n+1}^{n+1}$, получим: $S_{n+1}^{n+1} = \left(\frac{nS_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{nS_n+S_n+d}{n+1}\right)^{n+1} = S_n^{n+1}\left(1+\frac{d}{(n+1)S_n}\right)^{n+1} \geqslant S_n^{n+1}\left(1+\frac{d}{S_n}\right) = S_n^n(S_n+d) = S_n^n \cdot a_{n+1} \geqslant a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n+1}$. Это и требовалось.

Второе доказательство. Второе доказательство проведём также индукцией, прибегнув к необычной её форме, которая называется "ветвящаяся индукция". Именно, сначала докажем неравенство не для всех $n$, а только для степеней двойки. То есть, индукцией по $m$ покажем, что $\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^m}}{2^m} \geqslant \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{2^m}}$. База $m = 1$ очевидна. Переход от $m$ к $m+1$ ясен: выражение $\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}$ разбивается на две части и каждая оценивается: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^m}}{2^{m+1}} + \frac{a_{2^m+1}+a_{2^m+2}+\dots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \geqslant \frac{\sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{2^m}} + \sqrt[2^m]{a_{2^m+1} a_{2^m+2} \cdot \dots \cdot a_{2^{m+1}}}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{2^m}} \cdot \sqrt[2^m]{a_{2^m+1} a_{2^m+2} \cdot \dots \cdot a_{2^{m+1}}}} = \sqrt[2^{m+1}]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{2^{m+1}}}$, что и требовалось.

А теперь докажем, что если неравенство верно для $n+1$, то оно верно и для $n$. Именно, применим неравенство для $n+1$ к числам $a_1$, $a_2$, $\dots$, $a_n$ и $S_n$ (обозначение из прошлого доказательства). Имеем: $\left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+S_n}{n+1}\right)^{n+1} \geqslant a_1 a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n S_n$. Но $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n+S_n}{n+1} = S_n$, поэтому $S_n^{n+1} \geqslant a_1 a_2 a_3 \cdot \dots \cdot a_n S_n$, откуда, сокращением на $S_n$ всё получается (если $S_n = 0$, то все числа нули и неравенство тривиально).

Итак, для любого $n$ подбираем $m$ так, чтобы $2^m > n$ ("забираемся повыше по стволу индукции"), после чего "спускаемся по веточке индукции" от $2^m$ к $n$. Проверьте самостоятельно, что равенство достигается только при равенстве всех переменных.