Неравенства – 3. Упражнения.

В этом задании обсуждаются неравенства для произвольных (не обязательно неотрицательных) чисел.

Напомним, что для любых чисел $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ и любой перестановки $i_1,\ i_2, \ldots, i_n$ множества $\{1,\ 2, \ldots, n\}$ выполнено *транснеравенство*:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + x_2y_{i_2} + \cdots + x_ny_{i_n} \geqslant x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1$$

Напомним также важное следствие транснеравенства — *неравенство Чебышева*:

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{n} \geqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \geqslant \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n}$$

Наконец, верно очень важное *неравенство Коши – Буняковского*:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$$

Оно обращается в равенство только если наборы a_i и b_i пропорциональны.

1) Выведите из транснеравенства известное «неравенство о трёх квадратах»: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

Решение: Не ограничивая общности, считаем, что $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда к двум таким наборам применяем транснеравенство, беря справа перестановку $\{b,\ c,\ a\}$.

2) Докажите *неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном*:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Решение: Возведя в квадрат, получим, что надо доказать $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$. Это неравенство КБ, применённое к набору a_i и набору из единиц.

3) Выведите из неравенства Чебышева следующее известное неравенство для положительных чисел:

$$(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right) \geqslant n^2.$$

Решение: Ничто не мешает считать, что $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_n$ Тогда $\frac{1}{t_1} \leqslant \frac{1}{t_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{t_n}$ (и именно здесь нужна положительность!), после чего применяем к этим наборам Чебышева, причём его правую часть (для антимонотонного произведения), а не левую.

4) Известно, что $a + 2b + 3c$ не меньше 14. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2$ также не меньше 14.

Решение: Согласно неравенству КБ $(a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) \geqslant (a + 2b + 3c)^2 \geqslant 14^2$. Отсюда всё следует, поскольку $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

5) Докажите красивое неравенство (числа a_i любые, а b_i положительные):

$$\frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Когда это неравенство обратится в равенство?

Решение: К наборам $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ и $\sqrt{b_i}$ применяется неравенство Коши-Буняковского. Равенство при пропорциональности наборов.

6) Лёша желает отметить внутри заданного треугольника точку M так, чтобы для расстояний h_a, h_b, h_c от неё до соответствующих сторон треугольника число $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c}$ было бы как можно меньше. Какую точку ему следует выбрать?

Решение: Инцентр. В самом деле, $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} = \frac{a^2}{ah_a} + \frac{b^2}{bh_b} + \frac{c^2}{ch_c} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{ah_a+bh_b+ch_c}$ согласно задаче 5. Но последнее выражение равно $\frac{4p^2}{2S} = \frac{2p}{r}$. Тем самым, меньше Лёша получить не может. А $\frac{2p}{r}$ может, если квадраты сторон будут пропорциональны произведениям сторон на высоты, то есть, если все высоты будут равны. А это будет только для инцентра.