# Пути в графах. Связность.

1. **Пути.**

Пусть вершины графа $V_1$, $V_2$, ..., $V_n$ перечислены в таком порядке, что каждые две соседние вершины $V_i$ и $V_{i+1}$ соединяет ребро, причём никакие два из этих $n-1$ рёбер не повторяются. Говорят тогда, что задан **путь** (в оригинале *path*, в некоторых книгах этот термин переводится как "цепь") из $V_1$ в $V_n$. Отметим, что, в отличие от рёбер, вершины в пути могут повторяться.

Если, например, $V_1 = V_n$, путь называется ***циклом***. Если все вершины, составляющие путь, различны (кроме, быть может, начальной и конечной), говорят, что это ***простой путь*** (простой цикл). Количество рёбер в пути или цикле называется его ***длиной***.

Граф, любые две вершины которого связаны путём, называется ***связным***. Любой граф состоит из одной или нескольких связных частей, называемых его ***связными компонентами***.

2. **Эйлеровы пути и циклы.**

Эйлеру принадлежит постановка и решение задачи о мостах в Кеннигсберге, которая, как считается, положила начало теории графов. Задача состояла в поиске пути по городу, по разу проходящем по всем семи городским мостам через реку Прегель. Эйлер доказал её неразрешимость.

В общем случае говорят, что путь (цикл) называется эйлеровым, если он проходит через все рёбра графа, ровно один раз через каждое.

***Теорема (Л. Эйлер, 1736)*** Граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и все его вершины чётной степени. Граф имеет эйлерову цепь тогда и только тогда, когда он связен и все его вершины, кроме двух, имеют чётную степень.

Доказательство. Рассмотрим сначала существование эйлерова цикла. Условие связности, очевидно, необходимо. Необходима и чётность всех степеней: прохождение каждого ребра влечёт попадание в каждую вершину, а попав в неё, нужно её покинуть, так что в каждой вершине должно сходиться чётное число рёбер. Докажем достаточность. Начав в любой вершине, будем переходить из неё в другие, не повторяя рёбер. Этот процесс закончится в исходной вершине. Итак, в графе есть простые циклы. Рассмотрим наидлиннейший из них. Докажем, что он проходит через все рёбра. Пусть нет. Выкинем из графа этот цикл. Если остались рёбра, то они (на том же множестве вершин) образуют снова граф с чётными степенями вершин. Более того, одно из оставшихся рёбер инцидентно одной из вершин пройденного нами цикла (иначе связность нарушится). Начав из этой вершины, пройдём новый цикл, а потом склеим его с первым (пройдём сначала один, потом другой). Получим цикл большей длины — противоречие.

Во второй части теоремы необходимость показывается так же, а достаточность путём соединения ребром (или ребром с вершиной, если ребро уже есть) двух нечётных вершин. В полученном графе есть эйлеров цикл. Удалив добавленное ребро, получим искомый эйлеров путь.

Поиском эйлерова пути являются решения известных головоломок типа "Обведите фигуру, не отрывая карандаша от бумаги".

3. **Гамильтоновы пути и циклы.**

Поразительно, но очень похожая задача — найти путь или цикл, проходящий по разу по всем *вершинам* данного графа, гораздо сложнее. На данный момент критерии наличия такого пути математика не знает. Даже для конкретного графа бывает крайне трудно определить, есть таковые или нет.

Пути (циклы) с указанным свойством, называются ***гамильтоновыми***. Графы, в которых они существуют, также называются гамильтоновыми. Эти названия — дань уважения великому ирландскому математику и физику Уильяму Ровену Гамильтону. А задача, в которой эти понятия впервые возникли, как и задача Эйлера, имеет несколько легкомысленный характер: Гамильтон расположил 20 крупнейших городов Земли своего времени и дороги (морские и сухопутные), соединяющие их, на глобусе в виде вершин и рёбер додекаэдра и задался вопросом: можно ли по разу посетить все города?

К поиску гамильтоновых циклов сводятся разные задачи, например: можно ли группу людей посадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел между своими друзьями? Известна головоломка: требуется пройти конём шахматную доску, побывав по разу на каждом поле и вернувшись в конце в исходное. Эта головоломка разрешима.

К гамильтоновым циклам относится и "задача о коммивояжёре" : бродячему торговцу требуется посетить несколько городов, пройдя при этом минимальное расстояние, и вернуться в родной город. Здесь речь идёт о взвешенном графе — каждому ребру приписано число, считающееся его длиной (в обычном случае все длины — единицы). Эта задача в общем случае не решена. Фалкерсон, Данциг и Джонсон просчитали в 70-е годы на достаточно ещё несовершенных компьютерах минимальную цепь авиалиний, связывающих между собой столицы штатов США.

4. **Признак Дирака.**

Наша цель — доказать один из классических признаков гамильтоновости графа. Он принадлежит Габриэлю Эндрю Дираку, известному датскому математику английского происхождения (не путать с его отчимом, знаменитым математиком и физиком, основателем квантовой механики Паулем Дираком).

***Лемма.*** Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — максимальный путь в графе и сумма степеней концов не менее $n$, то в графе есть цикл длины $n$.

<u>Доказательство леммы.</u> Пусть $P$ — данный путь. Если его концы смежны, доказывать нечего. Если нет, то рёбра от них идут только во внутренние вершины $P$.

Если $a_1$ соединена с $a_{i+1}$, а $a_n$ — с $a_i$, то есть цикл-восьмёрка: из $P$ удаляется ребро $(a_i, a_{i+1})$ и добавляются два новых.

Если такого явления нет, то, полагая, что $a_n$ соединена с $k$ вершинами $P$, для соседей $a_1$ появляется $k$ "запрещённых" вершин, то есть не более чем $n-3-k$ "разрешённых". То есть сумма степеней концов $P$ будет не более чем $(1+k)+(1+n-3-k)=n-1$ — противоречие с условием.

***Теорема (Г. А. Дирак, 1952).*** Пусть дан граф с $n$ вершинами. Если сумма степеней двух любых несмежных вершин не меньше $n-1$, то в графе есть гамильтонов путь, а если не меньше $n$, то цикл.

<u>Доказательство первой части.</u> Ясно, что граф связен: если взять его две несмежные вершины, то у них обязан быть общий сосед, иначе сумма степеней вершин, которая не больше, чем $n-2$, будет не меньше $n-1$, что абсурдно.

Теперь пусть $P$ — наибольший путь в нашем графе. Пусть его длина $k<n$. Покажем, что есть цикл длины $k$. Если концы $P$ смежны, это так, а если нет, то сумма их степеней больше или равна $n-1 \geqslant k$, так что применяем лемму.

Итак, есть цикл длины $k$. Поскольку $k<n$, есть вершины вне $P$. В силу связности графа, одна из них соединена ребром с какой-нибудь вершиной из $P$. Но тогда есть путь длиной $k+1$, чего не может быть.

Итак, длина наибольшего пути не может быть меньше $n$, то есть гамильтонов путь есть.

<u>Доказательство второй части.</u> Согласно первой части, есть гамильтьонов путь. Если его концы смежны, то цикл найден, если нет, существует цикл по лемме.

Известно простое следствие, которое часто тоже называют признаком Дирака: если в графе с $n$ вершинами степень каждой вершины не менее $\frac{n}{2}$, то в нём есть гамильтонов цикл.