Гимназия 1543, 9-В класс, 13 марта.

Топология действительных чисел. Упражнения.

1) Пусть $A = (1, 2) \cup [3, 4) \cup \{5\}$. Найдите внутренность, внешность, границу, множества предельных и изолированных точек множества A.

2) Докажите, что $\partial A = \partial(\mathbb{R} \setminus A)$.

3) Докажите, что множество A замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R} \setminus A$ открыто.

4) Докажите, что замыкание множества замкнуто.

5) Верно ли, что $\bar{A}$ есть объединение A с множеством его предельных точек?

6) Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\emptyset$ — единственные множества, открытые и замкнутые одновременно.

7) Любое ли конечное множество замкнуто? А счётное? А может ли замыкание счётного множества иметь мощность континуума?

8) Докажите, что между любыми двумя действительными числами есть рациональное число.

Гимназия 1543, 9-В класс, 19 марта.

Топология действительных чисел. Упражнения-2.

1) Докажите, что объединение любой системы открытых множеств открыто и пересечение конечной системы открытых множеств открыто.

2) Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\emptyset$ — единственные множества, открытые и замкнутые одновременно.

3) Любое ли конечное множество замкнуто? А счётное? А может ли замыкание счётного множества иметь мощность континуума?

4) Докажите, что между любыми двумя действительными числами есть рациональное число.

5) Классифицируйте все точки прямой относительно множеств: а) $\mathbb{Q}$; б) $\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}\}$; в) $\{a + b\sqrt{2} | \, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

6) Покажите, что любое открытое множество есть не более чем счётное объединение интервалов.

7) Посчитайте $\sqrt{2}$ с погрешностью, не превышающей 10^{-4}.

Гимназия 1543, 9-В класс, 26 марта.

Топология действительных чисел. Упражнения-3.

1) Пусть $A \subset B$. Докажите, что $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2) Для любых ли подмножеств A и B верно:
а) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$? б) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$?

3) Пусть $A \subset B \subset C$. При этом $\partial A = \partial C$ и $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} C$. Докажите, что тогда $\partial B = \partial A = \partial C$ и $\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} B = \operatorname{Int} C$.

4) Докажите, что $\overline{A}$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

5) Докажите, что канторово множество несчётно.

6) Чему равно замыкание канторова множества?

7) Докажите, что канторово множество нигде не плотно (его замыкание не содержит ни одного интервала).