9 математический класс **20 марта 2010 года.**

Зачёт №4. Программа.

1) **Неравенство Бернулли.** Докажите, что при любом натуральном n и любом $x > -1$ верно $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Укажите, когда это неравенство обратится в равенство.

2) **Неравенство о средних.** Докажите для неотрицательных чисел неравенство $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

3) **Другие средние.** Для положительных чисел докажите, что среднее геометрическое не меньше среднего гармонического $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ и что среднее арифметическое не больше среднего квадратичного $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$.

4) **Неравенство Мюрхеда.** Неравенство Мюрхеда.

5) **Транснеравенство.** Докажите, что если $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$ и если $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$, то $x_1y_1 + \dots + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + \dots + x_ny_{i_n} \geqslant x_1y_n + \dots + x_ny_1$.

6) **Неравенство Чебышева.** Докажите, что если $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ и $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$, то $\frac{x_1y_1+\dots+x_ny_n}{n} \geqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n} \cdot \frac{y_1+\dots+y_n}{n} \geqslant \frac{x_1y_n+\dots+x_ny_1}{n}$.

7) **Неравенство Коши – Буняковского – Шварца.** Докажите, что $(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$. Укажите, когда это неравенство обратится в равенство.

8) **Интересное неравенство.** Докажите для любых a_i и положительных b_i неравенство $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n}$. Укажите, когда это неравенство обратится в равенство.

9) **Теорема Холла.** Теорема Холла.

10) **Латинский квадрат.** Прямоугольник $m \times n$ $(m < n)$ называется латинским, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строчке и в каждом столбце стоят разные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.

11) **Теорема Эйлера о мостах.** Граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и все его вершины чётной степени. Граф имеет эйлерову цепь тогда и только тогда, когда он связен и все его вершины, кроме двух, имеют чётную степень.

12) **Длиннейшие пути.** Докажите, что в любом связном графе два длиннейших простых пути имеют общие вершины.

13) **Теорема Эйлера про многогранники.** Пусть связный граф уложен на плоскости или сфере, V — число его вершин, E — рёбер и F — граней. Тогда $V - E + F = 2$.

14) **Непланарность.** Графы K_5 и $K_{(3,3)}$ не планарны.

15) **Платоновы тела.** Существует только пять правильных многогранников.

16) **Не ко всем вершинам много путей.** Докажите, что в любом многограннике найдётся по крайней мере 4 вершины со степенями, не превосходящими 5.