9 математический класс **27 марта 2010 года.**

Письменная работа «Вспомнить всё».

1) Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2009, для которого выполняется тождество $P(x)+P(1-x)=1$.

Например, $P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2009}+\frac{1}{2}$.

2) Каждое ребро графа окрашено в белый, синий или красный цвет. Известно, что из каждой вершины выходят рёбра всех цветов. Докажите, что существует простой цикл, содержащий рёбра всех трёх цветов.

Решение: Выйдем из любой вершины по белому ребру, оттуда пойдём по синему, далее по красному, снова по белому и так далее, всё время попадая в разные вершины (и, пока попадаем, возможно идти дальше). Как только мы попадём в уже пройденную ранее вершину, мы замкнём нужный цикл.

3) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c и d верно неравенство:

$$\left(\frac{a+b+c}{d}\right)^2+\left(\frac{b+c+d}{a}\right)^2+\left(\frac{c+d+a}{b}\right)^2+\left(\frac{d+a+b}{c}\right)^2\geqslant 36.$$

Первое решение. Левая часть по неравенству о среднем квадратичном и среднем арифметическом не меньше $\frac{1}{4}\left(\frac{a+b+c}{d}+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}\right)^2$, а выражение в скобках распадается на 6 пар вида $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, каждая из которых не меньше двойки.

Второе решение. Суммы вида $a+b+c$ не меньше, чем $3\sqrt[3]{abc}$. Заменяя их такими корнями мы не увеличим выражение. Далее применяем неравенство о средних для четырёх чисел.

4) Существует ли множество $M\in\mathbb{R}$ такое, что $\partial M=\left\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$?

Нет, тогда бы и 0 был бы граничной точкой для M. В самом деле, в любой окрестности нуля $(-\varepsilon\,;\,\varepsilon)$ найдётся число $\frac{1}{n}<\varepsilon$ (достаточно по аксиоме Архимеда найти $n>\frac{1}{\varepsilon}$). Далее рассматриваем такую маленькую окрестность $\frac{1}{n}$, которая целиком помещается в $(-\varepsilon\,;\,\varepsilon)$. А в этой окрестности есть как точки M, так и дополнения к нему. Тем самым и в $(-\varepsilon\,;\,\varepsilon)$ они есть.

5) Две окружности перпендикулярны друг другу и пересекаются в точках A и B. Через A проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках P и Q (помимо A). Докажите, что если $AP=AQ$, то $AP=AB$.

Лобовое решение. Пусть O_1 — центр той окружности, на которой точка P, а O_2 — оставшейся. Тогда $\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2=90°$, а потому O_1BO_2A вписан. Значит, $\angle AO_1B+\angle BO_2A=180°$, но $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AO_1B$ и $\angle AQB=\frac{1}{2}\angle AO_2B$ (вписанный угол вдвое меньше центрального), то есть $\angle APB+\angle BQA=90°$. Тогда треугольник PQB прямоугольный, и утверждение задачи вытекает из свойства медианы прямоугольного треугольника.

Решение с инверсией. Пусть $AP=AQ=a$, $AB=b$. Сделаем инверсию с центром в A радиуса a. Точки P и Q останутся на месте, точка B перейдёт в B', причём $AB'=\frac{a^2}{b}$. Однако треугольник PQB' будет прямоугольным (инверсия сохранит угол), поэтому (свойство медианы) $AB'=a$, то есть $\frac{a^2}{b}=a$, то есть $a=b$.

6) Два человека кидают монету. Первый кидает её 10 раз, второй 11 раз. Какова вероятность того, что у второго выпал орёл большее число раз, чем у первого?

Ответ: $\frac{1}{2}$. В самом деле, пусть второй пока кинул 10 раз. Тогда у первого больше с вероятностью p, у второго больше с такой же вероятностью (в силу симметрии), и поровну с вероятностью q. При этом $2p+q=1$. Вероятность, что у второго будет больше орлов, равна $p+\frac{q}{2}=\frac{1}{2}$.

7) Про комплексное число z известно, что $|z|=1$ и $arg\,z=\varphi$. Чему может быть равен $arg\,(z+1)$?

Ответ: $\frac{\varphi}{2}$, если $\varphi<\pi$, не определён при $\varphi=\pi$, $\pi+\frac{\varphi}{2}$ при $\varphi>\pi$. Первое решение. Векторы z и 1 складываются по правилу параллелограмма, но они равной длины, поэтому это ромб. Диагональ ромба же делит угол пополам. Случай $\varphi=\pi$ вырожден, а другая форма ответа при $\varphi>\pi$ появляется потому, что мы в курсе полагали меняющимся в $[0\,;\,2\pi)$. Если считать, что $arg\,z\in(-\pi\,;\,\pi]$, второго ответа не будет.

Второе решение. Аргумент — это $\angle(z,-1,1)$, а он, будучи вписанным в единичную окружность, вдвое меньше центрального $\angle(z,0,1)=\varphi$. Возникают те же случаи с теми же ответами.