

Парабола

12.02.10

Парабола — это множество точек, равноудаленных от прямой и точки, не лежащей на этой прямой. Точка называется **фокусом**, а прямая — **директрисой (направляющей)**.

Как построить параболу? Вот так:

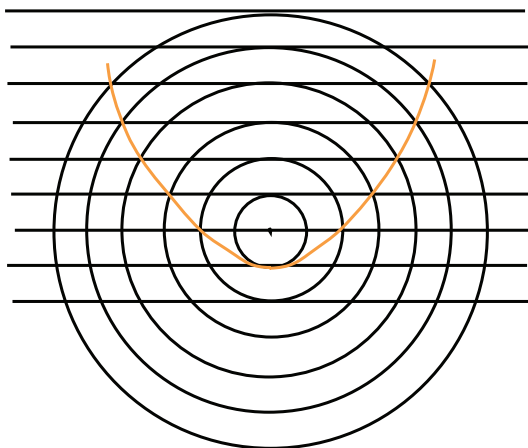


Рис. 1:

Расстояние от фокуса до точки параболы равно расстоянию от точки до директрисы.

Вопрос: что за линии будут при пересечении других прямых и окружностей?

Отрезки, вершины которых лежат на параболе — **хорды** параболы.

Ось симметрии параболы — **ось параболы**.

Точка пересечения оси параболы с самой параболой называется **вершиной параболы**.

Хорда, проходящая через фокус — **главная хорда**.

Другой способ построения параболы, при котором мы можем построить любую точку параболы: берём прямую l (на ней будет лежать вершина параболы) и точку F (фокус). Опускаем из F на l перпендикуляр FO . Берём на прямой l произвольную точку N . Через эту точку проводим перпендикуляр к l , отмеряем на нем отрезок NQ , равный FO , при этом QF пересекает l в точке R . Строим перпендикуляр к FQ в точке R , он пересечёт прямую NQ в точке M , так вот эта точка будет лежать на параболе.

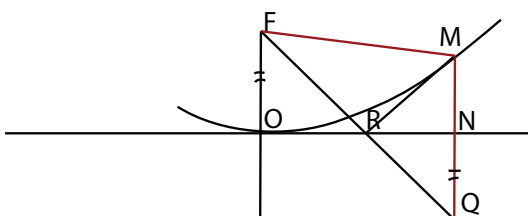


Рис. 2:

Вопрос: почему?

Внутренность параболы — множество, получившееся из объединения точек всевозможных хорд параболы без самой линии параболы.

Внешность параболы — это все точки плоскости, не являющимися внутренностью параболы или ей самой.

Касательная к параболе — это прямая, одна точка которой лежит на параболе, а остальные - в её внешности.

Докажем, что в получившейся картинке RM - это касательная. Пусть это не так, тогда существует ещё по крайней мере 1 точка пересечения RM с параболой M_2 . Строим Q_2 и R_2 аналогично Q и R . Тогда $FM_2 = M_2Q_2$, $M_2Q_2 \perp l$. $FR_2 = R_2Q_2$, $FM_2 = M_2Q_2$, так как $M_2 \in P$, где P — парабола. $FM_2 = M_2Q$, так как $FR = RQ$, $RM_2 \perp FQ$, отсюда получаем противоречие.

Следующее, о чем мы поговорим, будет оптическое свойство параболы. Оно используется очень широко, например, в автомобильных фарах светоотражающая поверхность имеет форму параболы, а все антенны- "тарелки" тоже параболы в сечении (и про это мы даже посмотрим мультик).

Давайте представим, что парабола у нас зеркальная, а в фокусе находится лампочка, которая испускает лучи во все стороны. Рассмотрим 1 луч и поймём, куда он придёт. Известно, что угол падения луча на плоскость равен углу отражения его от этой плоскости. Но у нас тут не плоскость (прямая), а кривая, поэтому мы будем смотреть на отражение от касательной. Итак, рисуем луч и его отражение. Рисуем перпендикуляр на директрису. Заметим, что касательная делит пополам угол между отрезками в фокус и на директрису. Заметим ещё пару вертикальных углов и получим, что отражённый луч лежит на перпендикуляре к директрисе.

Следующее, о чем надо сказать — это о том, какие параболы бывают. Заметим, что бывают такие "узкие" параболы, а бывают более "сплюснутые". Так вот они, на самом деле, одинаковые! Все параболы подобны и коэффициент подобия определяется расстоянием от фокуса до директрисы.

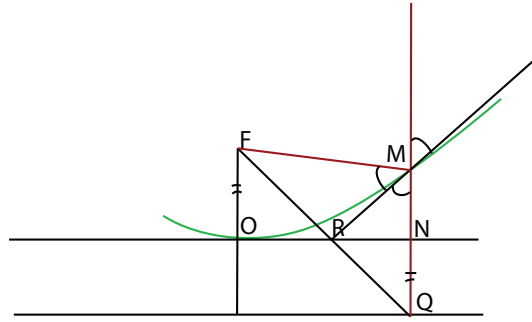


Рис. 3:

Теперь будет крутая вещь, которая принесёт много пользы в будущем: давайте посмотрим на касательные к окружности. Их из любой точки (не лежащей в круге) можно провести 2 штуки. Так вот для параболы всё также! Заметим ещё, что для окружности они будут равны, потому что для параболы это не так (рисую пример).

Итак, у нас есть парабола P , известны её фокус F и директриса d . Также есть точка во внешности, назовём её A . Берём и строим на FA , как на диаметре, окружность. Проведём прямую l через вершину параболы так, чтобы она была параллельна директрисе (заметим также, что это касательная в вершине, кстати, почему?). Точки, в которых l пересечет окружность - K и L . Теперь проведём AK и AL до пересечения с параболой, получим соответственно B и C . Собственно, AK и AL - это и есть искомые касательные.

Доказательство: по построению $\angle FKA = 90^\circ \Rightarrow \angle FKB = 90^\circ$, $FB = BQ$, BK — медиана и высота, поэтому биссектриса, вспоминаем оптическое свойство, а из него и следует, что это касательная.