Гимназия 1543, 9-В класс, 17 апреля.

Производящая функция.

Понятие формального степенного ряда.

Формальным степенным рядом переменной x называется выражение вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \dots$$

Это выражение следует понимать исключительно, как последовательность коэффициентов a_k. Если a — последовательность, то формальный степенной ряд (переменной x) с такой последовательностью коэффициентов договоримся обозначать $\tilde{a}(x)$ или просто $\tilde{a}$. Ряд $\tilde{a}(x)$ также называют *производящей функцией* последовательности a.

Арифметика формальных степенных рядов.

Определим арифметические операции над формальными степенными рядами: сложение и умножение. Пусть a и b — последовательности коэффициентов формальных степенных рядов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.

Суммой формальных степенных рядов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ называется ряд $\tilde{c}$ такой, что $c_k = a_k + b_k$.

Произведением формальных степенных рядов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ называется ряд $\tilde{c}$ такой, что $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$. Такое умножение для конечных степенных рядов совпадает с обычным полиномиальным умножением.

Сумма и произведение рядов ассоциативны, коммутативны и связаны между собой дистрибутивностью.

Определим деление формальных степенных рядов как операцию, обратную умножению. Пусть $\tilde{c} = \tilde{a} : \tilde{b}$. Тогда $a_k = b_0 c_k + \ldots + b_k c_0$. Отсюда следует, что для того, чтобы операция деления была определена, необходимо, чтобы первый ненулевой элемент встречался в b не позже, чем в a. Пусть b_m — первый ненулевой элемент в b. Тогда:

$$c_0 = \frac{a_m}{b_m}; \quad c_k = \frac{a_{m+k} - c_0 b_{m+k} - \ldots - c_{k-1} b_{m+1}}{b_m}.$$

С делением формальных степенных рядов связана замечательная формула, называемая иногда *суммой бесконечной геометрической прогрессии*:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Эта формула доказывается просто перемножением “в лоб”.

Полезной также будет операция композиции (подстановки) формальных степенных рядов.

Подстановкой формального степенного ряда $x\tilde{b}(x)$ в ряд $\tilde{a}(x)$ называется ряд:

$$\tilde{c}(x) = \tilde{a}(x\tilde{b}(x)) = a_0 + a_1 x\tilde{b} + a_2 x^2 \tilde{b}^2 + \ldots$$

Сумма в правой части равенства является формальным степенным рядом, т.к. для любого k коэффициент при x^k определяется лишь конечным числом членов этой суммы (с a_0 по $a_k x^k \tilde{b}^k$). Заметим, что подставлять в ряд $\tilde{a}$ просто ряд $\tilde{b}$ без множителя x, вообще говоря, нельзя, т.к. при этом могут получиться бесконечные суммы чисел.

Теорема о разложении рациональной функции в сумму простейших дробей.

Отвлечёмся немного от формальных степенных рядов и докажем полезный факт из теории многочленов, позволяющий разложить рациональную функцию (отношение двух многочленов) в сумму более простых дробей. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Тогда верна следующая теорема:

Теорема. *Пусть $Q(x)$ имеет корень x_0 кратности k. Тогда $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A}{(x-x_0)^k} + \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)}$, где $Q_0(x) \cdot (x - x_0) = Q(x)$.*

Доказательство.

$$\frac{A}{(x-x_0)^k} + \frac{P_0(x)}{Q_0(x)} = \frac{A\frac{Q(x)}{(x-x_0)^k} + P_0(x)(x-x_0)}{Q(x)}.$$

Наша задача — подобрать число A и многочлен $P_0(x)$, чтобы получить в числителе $P(x)$. Сделаем замену $x = y + x_0$. $P_0(y + x_0) = P_1(y)$ — тоже произвольный многочлен (P_0 получается из P_1 обратной заменой переменной). Тогда нам нужно получить:

$$P(y + x_0) = P_1(y)y + A\frac{Q(y + x_0)}{y^k}.$$

Так как $\dfrac{Q(y+x_0)}{y^k}$ не имеет корня 0, то свободный член этого многочлена ненулевой. При помощи A получим свободный член $P(y + x_0)$, равенство остальных коэффициентов (при y^m, $m > 0$) получим, подобрав коэффициенты P_1. ЧТД

Таким образом, мы получили следующее разложение $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (x_i — корни $Q(x)$ кратностей k_i):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{a_{11}}{x-x_1} + \ldots + \frac{a_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{a_{p1}}{x-x_p} + \ldots + \frac{a_{pk_p}}{(x-x_p)^{k_p}}.$$

Числа Фибоначчи.

Покажем, как при помощи формальных степенных рядов получить явную формулу n-го числа Фибоначчи. Пусть $\tilde{F}$ — производящая функция чисел Фибоначчи. Заметим, что $\tilde{F}(1-x-x^2)=0+1\cdot x$ (умножение на x есть сдвиг последовательности вправо с добавлением нуля на освободившееся место). Значит, $\tilde{F}=\dfrac{x}{1-x-x^2}$. Разложим эту дробь в сумму простейших. Для этого воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2},$$

где $x_1=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, $x_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$.

Приводя дроби в правой части к общему знаменателю, получаем:

$$-x=A(x-x_2)+B(x-x_1)=(A+B)x-Ax_2-Bx_1.$$

Поэтому $A=-1-B$ и $B(x_1-x_2)-x_2=0$, то есть $B=\frac{1}{2\sqrt{5}}(-1-\sqrt{5})$. Соответственно, $A=\frac{1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})$.

Перепишем ещё раз выражение для $\tilde{F}$:

$$\tilde{F}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}=-\frac{A}{x_1}\frac{1}{1-\frac{x}{x_1}}-\frac{B}{x_2}\frac{1}{1-\frac{x}{x_2}}.$$

Применяя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, получим:

$$F_n=-\frac{A}{x_1}\left(\frac{1}{x_1}\right)^n--\frac{B}{x_1}\left(\frac{1}{x_2}\right)^n.$$

После некоторых несложных преобразований получим:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Биномиальные коэффициенты.

Вам отлично известен бином Ньютона. Для любого натурального n верна формула:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n.$$

Можно переписать правую часть в виде формального степенного ряда с коэффициентами C_n^k, $k\in\mathbb{Z}_+$, определяемыми формулами:

$$C_n^0=1,\quad C_n^1=n,\quad C_n^{k+1}=C_n^k\frac{n-k}{k+1}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}.$$

Оказывается, при таком определении биномиальных коэффициентов формула бинома будет верной не только при натуральных, но и при целых и даже рациональных n.

Докажем формулу сначала для целой отрицательной степени. Нам достаточно доказать, что $(1+x)^{-n}(1+x)=(1+x)^{1-n}$, то есть что:

$$C_{-n}^0=C_{1-n}^0;\quad C_{-n}^k+C_{-n}^{k-1}=C_{-n+1}^k.$$

Первое соотношение следует напрямую из определения биномиальных коэффициентов, второе следует из явной формулы для C_n^k.

Чтобы доказать формулу бинома для рациональной степени, надо рациональную степень сначала определить, чем и займёмся.

Корень из формального степенного ряда.

Определим корень n-й степени для рядов с положительным свободным членом. *Корнем степени* n ряда $\tilde{a}$ с положительным свободным членом называется ряд $\tilde{b}$ с положительным свободным членом такой, что $\tilde{b}^n=\tilde{a}$. Обозначение: $\tilde{b}=\tilde{a}^{\frac{1}{n}}$.

Докажем корректность определения. Пусть $\tilde{b}(x)=b_0(1+x\tilde{c}(x))$. Воспользуемся формулой бинома:

$$\tilde{b}(x)^n=(b_0+b_0x\tilde{c}(x))^n=b_0^n(1+x\tilde{c}(x))^n=b_0^n(1+C_n^1x\tilde{c}(x)+\ldots+C_n^nx^n\tilde{c}^n(x))=\tilde{a}(x).$$

Докажем, что последовательность c и число b_0 определяются однозначно. Очевидно, $b_0=\sqrt[n]{a_0}$. Чтобы определить c_k, посмотрим на коэффициент при x^{k+1}. Из слагаемого $C_n^1x\tilde{c}$ туда войдёт $C_n^1c_k$. Из слагаемого $C_n^mx^m\tilde{c}^m$ туда войдут всевозможные выражения вида $C_n^mc_{i_1}\ldots c_{i_m}$, где $i_1,\ldots i_m$ — разбиение числа $k+1-m$ на целые неотрицательные слагаемые. Если мы знаем все c_i до $(k-1)$-го включительно, то значения таких выражений нам уже известны. Значит, их сумма S_k известна. Поэтому мы можем (однозначно) определить $c_k=\dfrac{\frac{a_{k+1}}{a_0}-S_k}{C_n^1}$.