Гимназия 1543, 9-В класс, 30 января.

Неравенство Мюрхеда.

Краткие теоретические сведения.

Напомним несколько определений, касающихся многочленов от нескольких переменных.

Одночленом (от переменных $x_1, \ldots, x_n$) называется выражение вида $cx_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, где $c \neq 0$, k_i — целые неотрицательные числа. Степенью одночлена называется сумма степеней переменных, в него входящих: $k_1 + \ldots + k_n$.

Многочленом (от n переменных) называется отображение $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{n} \to \mathbb{R}$, равное либо тождественному нулю, либо сумме нескольких (с различными наборами степеней переменных) одночленов. Степенью ненулевого многочлена называется максимальная из степеней одночленов, его составляющих.

Ненулевой многочлен называется *однородным*, если степени всех одночленов, его составляющих, равны.

Многочлен $P(x_1, \ldots x_n)$ называется *симметрическим*, если $P(x_1, \ldots x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки σ.

Простейшее неравенство Мюрхеда.

Пусть a и b — положительные числа, p и q — целые неотрицательные, $p > q + 1$. Тогда:

$$a^p b^q + b^p a^q \geqslant a^{p-1} b^{q+1} + b^{p-1} a^{q+1},$$

причём равенство достигается только при $a = b$.

Доказывается это утверждение разложением на множители:

$$a^p b^q + b^p a^q - a^{p-1}b^{q+1} - b^{p-1}a^{q+1} = a^q b^q (a^{p-q} + b^{p-q} - a^{p-q-1}b - b^{p-q-1}a) =$$
$$= a^q b^q (a^{p-q-1} - b^{p-q-1})(a - b) = a^q b^q (a-b)^2 (a^{p-q-2} + \ldots + b^{p-q-2}).$$

Заметим, что в этом разложении всё, кроме $(a-b)^2$, положительно, а $(a-b)^2 \geqslant 0$, причём равенство нулю достигается только в случае $a = b$. Отдельно следует рассмотреть случай $p = q + 2$, в котором вместо последнего сомножителя $(a^{p-q-2} + \ldots + b^{p-q-2})$ стоит 1. Таким образом мы доказали простейшее неравенство Мюрхеда.

Другой взгляд на неравенство Коши.

Вспомним неравенство Коши: для всех положительных $x_1, \ldots, x_n$

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n},$$

причём равенство имеет место только в случае $x_1 = \ldots = x_n$.

Докажем его при помощи только что доказанного простейшего неравенства. Для этого перепишем его в немного другом виде:

$$\frac{x_1^n + \ldots + x_n^n}{n} \geqslant x_1 \ldots x_n.$$

Доказательство проведём для $n = 3$, обозначив переменные через a, b и c для наглядности. Случай $n > 3$ отдельно доказывать не будем. Проведём следующие преобразования:

$$\frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) = \frac{1}{3}(a^3b^0c^0 + a^0b^3c^0 + a^0b^0c^3) = \frac{1}{6}(a^3b^0c^0 + a^0b^3c^0 + a^0b^3c^0 + a^0b^0c^3 + a^0b^0c^3 + a^3b^0c^0) =$$
$$= \frac{1}{6}\left[c^0(a^3b^0 + a^0b^3) + a^0(b^3c^0 + b^0c^3) + b^0(a^0c^3 + a^3c^0)\right].$$

Теперь к каждому из выражений в круглых скобках применим простейшее неравенство Мюрхеда. Получим, что всё выражение не меньше, чем:

$$\frac{1}{6}\left[c^0(a^2b^1 + a^1b^2) + a^0(b^2c^1 + b^1c^2) + b^0(a^1c^2 + a^2c^1)\right] = \frac{1}{6}\left[b^1(c^0a^2 + c^2a^0) + a^1(c^0b^2 + c^2b^0) + c^1(a^0b^2 + a^2b^0)\right].$$

Опять применим простейшее неравенство Мюрхеда и получим, что всё выражение не меньше $\frac{1}{6} \cdot 6a^1b^1c^1$, что и требовалось. Более того, мы доказали не только неравенство Коши, но ещё и два промежуточных неравенства. Показанный приём, как выясним немного позже, позволяет написать весьма общее неравенство для однородных симметрических многочленов, называемое неравенством Мюрхеда. Но перед изложением общей теории нам понадобится несколько определений.

Симметризация одночлена. Операция R_{ij}.

Пусть $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — набор целых неотрицательных чисел (будем для краткости в дальнейшем называть такой набор $\mathbb{Z}_+^n$-набором суммы $k_1 + \ldots + k_n$). Такому набору можно сопоставить симметрический однородный многочлен следующего вида:

$$S[k] = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)}^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}^{k_n},$$

где под знаком $\sum\limits_{\sigma}$ понимается сумма, взятая по всем подстановкам σ. Проще говоря, берётся одночлен со степенями переменных $k_1, \ldots, k_n$, в нём переменные переставляются всевозможными способами, получившиеся одночлены складываются, а затем получившаяся сумма делится на количество слагаемых. Многочлен $S[k_1, \ldots k_n]$ называется *симметризацией* одночлена $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$. Будем его ещё называть симметричным многочленом, построенным по набору k, а также (несколько некорректно) — симметризацией набора k.

Будем говорить, что набор k' получен из набора k операцией “скидывания кирпича”, если найдётся пара различных индексов i и j таких, что $k'_i = k_i - 1$, $k'_j = k_j + 1$, остальные элементы наборов совпадают и $k'_i \geqslant k'_j$. Набор k' будем обозначать через $R_{ij}k$.

“Скидыванием кирпича” эта операция называется из-за наглядной иллюстрации при помощи т.н. *диаграмм Юнга*:

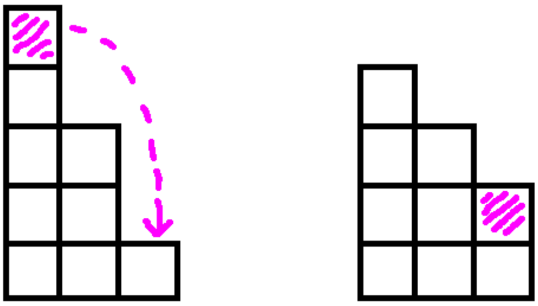

Диаграмма Юнга $\mathbb{Z}_+^n$-набора k состоит из n столбиков, i-й слева столбик выстроен из k_i квадратиков. Традиционно диаграммы Юнга рисуются для монотонно невозрастающих наборов, т.к. зачастую это бывает удобно (а $S[k]$ всё равно не зависит от порядка элементов набора k).

Неравенство Мюрхеда.

Как мы уже видели при рассмотрении неравенства Коши, $S[k](x_1, \ldots, x_n) \geqslant S[R_{ij}k](x_1, \ldots, x_n)$ при любых положительных $x_1, \ldots, x_n$, причём равенство достигается только при $x_1 = \ldots = x_n$. Докажем это формально.

Разобъём в $S[k]$ все слагаемые на пары, полученные подстановками σ и σ', где $\sigma = \sigma' \circ \tau_{ij}$. В каждой паре вынесем за скобки $(x_{\sigma(i)}^{k_i} x_{\sigma(j)}^{k_j} + x_{\sigma(j)}^{k_i} x_{\sigma(i)}^{k_j})$. Теперь к каждой паре слагаемых применим простейшее неравенство Мюрхеда и раскроем все скобки обратно. Получится $S[R_{ij}k]$. Таким образом, мы пришли к следующему утверждению:

Неравенство Мюрхеда. Если набор l получен из набора k при помощи конечного числа операций “скидывания кирпича”, то при любых положительных $x_1, \ldots, x_n$ верно неравенство:

$$S[k] \geqslant S[l],$$

причём равенство достигается только при $x_1 = \ldots = x_n$.

В связи с этим утверждением может возникнуть несколько вопросов. Во-первых, как определить, что один набор может быть “перекидан” в другой? Во-вторых, можно ли написать такое неравенство для пары наборов, которые нельзя получить друг из друга при помощи “скидывания кирпичей” (и вообще, бывают ли такие пары наборов)?

Ответим для начала на второй вопрос, а из него неожиданно получится ответ и на первый вопрос. Докажем для начала следующую лемму.

Лемма.

Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен с положительным коэффициентом при старшей степени x. Тогда найдётся положительное значение x, при котором $P(x) > 0$.

Доказательство. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Без потери общности считаем $a_n = 1$ (на него можно поделить все коэффициенты, т.к. по условию $a_n > 0$). Если $x \geqslant 1$, то можно написать цепочку неравенств:

$$|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \leqslant |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + \ldots + |a_0| \leqslant (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)\,|x|^{n-1}.$$

Поэтому достаточно взять x, одновременно большее 1 и суммы модулей коэффициентов $a_0, \ldots a_{n-1}$. Лемма доказана.

Неравенство Мюрхеда. Необходимое условие.

Пусть $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — два $\mathbb{Z}_+^n$ набора. Поймём, при каких условиях между $S[k]$ и $S[l]$ можно написать знак неравенства:

$$S[k](x_1, \ldots x_n) \geqslant S[l](x_1, \ldots x_n), \quad x_1 > 0, \ldots, x_n > 0.$$

Так как $S[k]$ не зависит от порядка, в котором взяты числа набора k, будем считать, что наборы монотонные: $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_n$, $l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_n$.

Подставим в неравенство вместо первых m переменных x, вместо остальных 1. В левой части будет многочлен от x степени $k_1 + \ldots + k_m$, в правой — $l_1 + \ldots + l_m$, оба многочлена с положительными коэффициентами. Перенеся всё в правую часть и воспользовавшись леммой, немедленно получим:

$$k_1 + \ldots + k_m \geqslant l_1 + \ldots + l_m, \quad m = \overline{1, n}.$$

(в противном случае старший член в правой части был бы с положительным коэффициентом перед ним)

Мы получили некоторое условие на наборы k и l, заключающееся в том, что сумма любого числа наибольших элементов k не меньше суммы того же числа наибольших элементов l. Если для k и l выполняется это условие, то будем говорить, что набор k *мажорирует* набор l.

Заметим также, что при $m = n$ неравенство $S[k] \geqslant S[l]$ вырождается в $x^{k_1+\ldots k_n} \geqslant x^{l_1+\ldots l_n}$, из которого следует, что суммы наборов должны быть равны.

Мажорирование и кирпичи.

Оказывается, мажорирование одним набором другого той же суммы есть не только необходимое условие неравенства, но и достаточное, т.е. если набор k мажорирует набор l той же суммы, то k можно "перекидать" в l. Докажем это.

Будем вести индукцию по высоте диаграммы Юнга. Если высота равна 1, то при фиксированном числе кирпичей есть только один упорядоченный набор. Поэтому никаких операций не требуется.

Пусть высота больше 1. Тогда посмотрим на нижнюю строчку. Заметим, что длина её в наборе k не больше её длины в наборе l. В противном случае во всём наборе l не больше кирпичей, чем в части набора k, а общее число кирпичей должно быть одинаково.

Если длины нижней строки одинаковы, то уберём её, воспользуемся предположением индукции, а затем обратно вернём.

Если же длины различны, то покажем, что в этом случае можно кинуть кирпич, уменьшив разность длин, при этом не нарушая мажорирования набором, полученным из k, набора l. Кидать будем кирпич из самого правого столбца с таким номером i, что $k_i > l_i$, в самый левый пустой столбик. После броска получим набор k'.

Рассмотрим суммы $K_m = k_1 + \ldots + k_m$, $K'_m = k'_1 + \ldots + k'_m$ и $L_m = l_1 + \ldots + l_m$. При $m < i$ $K'_m = K_m$. Пусть при $m \geqslant i$ получилось, что $K'_m = K_m - 1 < L_m$. Но тогда $L_m = K_m$, т.е. справа от m-го столбца в наборах k и l поровну кирпичей. Учитывая, что в столбцах правее i-го в l не меньше кирпичей, чем в k, получаем, что число этих столбцов в l не больше, чем в k, что противоречит с ненулевой разностью длин нижней строки. Значит, новый набор k' по-прежнему мажорирует l. При этом разность длин нижней строки k' и l на 1 меньше, чем в паре k и l. То есть, можно, не нарушая мажорирования одним набором другого, сравнять длины нижней строки, а затем воспользоваться вышеизложенными рассуждениями.

Таким образом мы пришли к наиболее общему неравенству Мюрхеда, имеющему вид критерия.

Неравенство (критерий) Мюрхеда.

Пусть k, l — $\mathbb{Z}^n_+$ наборы. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:
а) При любых положительных $x_1, \ldots, x_n$ выполняется неравенство $S[k] \geqslant S[l]$.
б) Наборы k и l одной суммы и k мажорирует l.
в) Набор l можно получить из набора k "скидыванием" кирпичей.

Примеры импользования.

1) Неравенство Коши.

Оно получается, если заметить, что набор $(n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1})$ без труда "перекидывается" в $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})$.

2) Неравенство о трёх квадратах: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

Слева стоит $3S[(2, 0)]$, справа — $3S[(1, 1)]$.

3) t_1, …, t_n — положительные числа, $T = t_1 + \ldots + t_n$. Докажите, что:

$$\frac{t_1}{T - t_1} + \ldots + \frac{t_n}{T - t_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Введём обозначение $a_k = T - t_k$. Левая часть примет вид:

$$\frac{T - a_1}{a_1} + \ldots + \frac{T - a_n}{a_n} = \frac{T}{a_1} + \ldots + \frac{T}{a_n} - n = \frac{T \cdot n \cdot S[(1, \ldots, 1, 0)]}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} - n.$$

Учитывая, что $nS[(1, 0, \ldots, 0)] = a_1 + \ldots + a_n = nT - T = (n-1)T$, получаем:

$$\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n \cdot S[(1, 0, \ldots, 0)] \cdot S[(1, \ldots, 1, 0)]}{S[(1, \ldots, 1)]} - n.$$

Произведение $S[(1, 0, \ldots, 0)] \cdot S[(1, \ldots, 1, 0)]$ равно $\dfrac{1}{n} S[(1, \ldots, 1)] + \dfrac{n-1}{n} S[(2, 1, \ldots, 1, 0)]$. Подставляя это в нашу левую часть, имеем:

$$\frac{n}{n-1} + n \cdot \left(\frac{S[(2, 1, \ldots, 1, 0)]}{S[(1, \ldots, 1)]} - 1 \right).$$

В числителе дроби в скобках "скинем кирпич". Получим, что выражение в скобках неотрицательно. Неравенство доказано.