

Тригонометрия - 3

Обратные тригонометрические функции

- Определение 1.** Пусть $-1 \leq y \leq 1$. Тогда **арксинусом** y называется такое число x , что $\sin x = y$ и $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
Запись: $x = \arcsin y$.
- Определение 2.** Пусть $-1 \leq y \leq 1$. Тогда **арккосинусом** y называется такое число x , что $\cos x = y$ и $0 \leq x \leq \pi$.
Запись: $x = \arccos y$.
- Определение 3.** **Арктангенсом** y называется такое число x , что $\operatorname{tg} x = y$ и $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Запись: $x = \operatorname{arctg} y$.
- Определение 4.** **Арккотангенсом** y называется такое число x , что $\operatorname{ctg} x = y$ и $0 < x < \pi$. Запись: $x = \operatorname{arcctg} y$.

- Вычислите: а) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; в) $\operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} \frac{\pi}{3})$.
- При каких t верно равенство: а) $\cos(\operatorname{arccos} t) = t$; б) $\arccos(\cos t) = t$; в) $\sin(\arcsin t) = t$; г) $\arcsin(\sin t) = t$?
- При каких значениях x верно равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$?
- Докажите тождество: а) $\operatorname{tg}(|\operatorname{arctg} x|) = |x|$; б) $\operatorname{ctg}(|\operatorname{arcctg} x|) = x$; в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.
- Вычислите: а) $\arcsin(\sin 10)$; б) $\arccos(\cos 5)$.
- Постройте графики функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$. Укажите область определения и область значений каждой функции.
- Докажите тождества: а) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$; б) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; в) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$; г) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.
- Вычислите: а) $\cos(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $\cos(\arcsin \frac{1}{3})$; в) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$; г) $\sin(\arccos(\frac{3}{5}))$.
- Докажите, что если $0 \leq x \leq 1$, то $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Докажите тождество: а) $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Теоремы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

11. Докажите записанные выше формулы. Указание. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OP_\alpha}$ и $\overrightarrow{OP_\beta}$.

12. Выразите (ко)тангенс суммы и разности через (ко)тангенсы слагаемых. Укажите, при каких условиях верны полученные формулы.

Домашнее задание

13. Вычислите:

а) $\operatorname{tg} \left(\arccos 1 - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$;	г) $\sin \left(\pi - \arcsin \frac{2}{5} \right)$;	ж) $\cos \left(\arcsin \frac{5}{13} \right)$;
б) $\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}} + \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$;	д) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg} 7 \right)$;	з) $\sin(\operatorname{arctg} 0, 25)$;
в) $\cos \left(\pi + \arccos \left(-\frac{2}{3} \right) \right)$;	е) $\operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}(-5) \right)$;	и) $\operatorname{tg}(\arccos 13)$.