Предел последовательности — 3

Еще несколько следствий из аксиомы непрерывности

Ранее из аксиомы непрерывности была получена аксиома о вложенных отрезках. Ее уточняет

Лемма Кантора о стягивающихся отрезках. Пусть на числовой прямой есть бесконечная последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю. Тогда существует и единственна точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

Лемма Больцано-Вейерштрасса о предельной точке. 1) Из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. 2) Ограниченная последовательность имеет предельную точку.

1. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность ограничена. Верно ли обратное?

   Теорема Вейерштрасса. Всякая монотонная ограниченная последовательность сходится.

   Указание. Пусть последовательность неубывающая. Тогда рассмотрим точную верхнюю грань множества членов последовательности.

   Теорема Вейерштрасса позволяет доказать существование предела, не вычисляя его. Для вычисления часто удобно задать последовательность реккурентно, перейти к пределу и решить получившееся уравнение.

2. Найдите описанным способом предел последовательности: а) $x_n = q^n$ при $0 < q < 1$; б) $x_n = \frac{2^n}{n!}$.

3. Вычислите: а) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$; б) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\ldots}}}$.

4. Последовательность задана рекуррентным соотношением. Докажите, что она имеет предел, и найдите его.
   а) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $x_1 = a > 1$. б) $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$.

5. Рассмотрим такую последовательность: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 - x_n$. Обозначим ее предел как a, тогда $a = 1 - a$, откуда $a = \frac{1}{2}$. Где ошибка?

6. Последовательность задана рекуррентным соотношением: $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Ограничена ли она?

7. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10}$. *Указание.* Сначала докажите существование предела, а затем воспользуйтесь равенством $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{10}$

8. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$. *Указание.* Угадайте, чему равен этот предел, затем вспомните определение предела.

   Определение 1. Последовательность называется ***фундаментальной***, если она имеет отрезки-ловушки сколь угодно малой длины.

   Определение 2. Последовательность x_n называется ***фундаментальной***, если $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N)(\forall k, l > N)(|x_k - x_l| < \varepsilon)$.

9. Докажите эквивалентность двух последних определений.

10. Сформулируйте определение последовательности, не являющейся фундаментальной.

11. Докажите, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

12. Докажите, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

    Критерий Коши. Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

13. а) Может ли фундаментальная последовательность рациональных чисел не иметь рационального предела? б) Может ли сходящаяся к рациональному числу последовательность рациональных чисел не быть фундаментальной?

14. Докажите расходимость гармонического ряда с помощью критерия Коши.

Число e

15. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает.

    Указание. Примените неравенство Коши к $n+1$ числу: 1 и n раз по $1+\frac{1}{n}$.

16. Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.

    Определение.
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
.

17. Докажите корректность определения числа e.

18. Вычислите пределы последовательностей: а) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$; б) $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$; в) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; г) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$; д) $\left(\frac{5n+6}{1+5n}\right)^{\frac{n}{2}}$; е) $\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-3}\right)^n$; ж) $\left(\frac{3n^2-1}{n^2+n+1}\right)^n$; з) $n^{-\frac{1}{n}}$.

Домашнее задание

19. Докажите, что из всякой неограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$

20. Вычислите: а) $\sum_{n=0}^{\infty}(0,6)^n$, б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

21. Докажите, что последовательность $\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$ бесконечно мала.

22. Докажите, что последовательность $x_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}$ сходится.

23. Последовательность задана рекуррентным соотношением: а) $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, $a_1=\sqrt{3}$; б) $a_n = a_{n-1}-a_{n-1}^2$, $a_1=\frac{1}{2}$. Докажите, что она имеет предел, и найдите его.

24. Найдите предел последовательности a_n, если $a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{27}{a_n^2}\right)$, $a_1 = 1$

25. Вычислите $\sqrt[n]{2^n+3^n}$.

26. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

27. Вычислите методом последовательных приближений а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{5}$ с точностью до сотых.

28. Вычислите пределы последовательностей: а) $\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$; б) $\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n}{2}}$; в) $\left(1+\frac{7}{2n+3}\right)^n$; г) $\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$; д) $\left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n-2}\right)^{\frac{1}{n}}$.