

## Зачет по теме "Предел последовательности"

Теория

1. Определение действительного числа. Докажите, что действительное число является рациональным тогда и только тогда, когда оно записывается конечной или бесконечной периодической дробью. Сравнение действительных чисел.
2. Аксиома непрерывности. Доказательство ее выполнимости на рассматриваемой модели множества действительных чисел. Условие единственности разделяющего числа. Теорема о точной верхней грани.
3. Определения арифметических действий над действительными числами. Корректность определения суммы.
4. Определения предела и предельной точки. Определение расходящейся последовательности. Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
5. Бесконечно малая последовательность. Теоремы о сумме бесконечно малых последовательностей и о произведении бесконечно малой и ограниченной последовательностей. Теоремы о пределе суммы, разности и произведения.
6. Найдите предел последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ , для  $|a| > 1$  и  $|a| < 1$ . Докажите формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии. Докажите, что если для почти всех  $n$   $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
7. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
8. Лемма Кантора о стягивающихся отрезках. Лемма Больцано-Вейерштрасса о предельной точке. Теорема Вейерштрасса.
9. Фундаментальная последовательность. Критерий Коши. Расходимость гармонического ряда.
10. Докажите существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ .

Задачи

11. Докажите по определению, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 10}{3n - 7} = \frac{2}{3}$ .
12. Приведите примеры (если это возможно):
  - а) немонотонной последовательности, имеющей предел;
  - б) последовательности рациональных чисел, стремящейся к  $\sqrt{2}$
13. Обязательно ли предел последовательности является ее предельной точкой? А наоборот? Сколько предельных точек может быть у монотонной последовательности?
14. Верно ли, что:
  - а) если некоторый отрезок является кормушкой для последовательности  $a_n$ , то никакое число вне этого отрезка не может быть пределом последовательности  $x_n$ ;
  - б) если некоторый отрезок является кормушкой для последовательности  $x_n$ , то у этой последовательности есть предельная точка;
  - в) если у последовательности есть единственная предельная точка, то она является пределом этой последовательности;
  - г) если у последовательности есть две предельные точки, то у нее нет предела?
15. Существует ли последовательность, множество предельных точек которой есть: а)  $\mathbb{N}$ ; б)  $[0; 1]$ ; в)  $\mathbb{Q}$ ; г)  $\mathbb{R}$ ?
16. Может ли сходящаяся последовательность перестать быть сходящейся, если изменить конечное число ее членов?

17. Последовательность  $b_n$  получена из сходящейся последовательности  $a_n$  перестановкой членов (возможно, бесконечного их числа). Может ли последовательность  $b_n$ : а) сходить к другому пределу; б) расходиться?
18. Последовательность  $b_n$  получена из сходящейся последовательности  $a_n$  изменением всех членов с нечетными номерами. Может ли последовательность  $b_n$ : а) сходить к другому пределу; б) расходиться?
19. Докажите, что подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.
20. Докажите, что точка  $a$  является предельной точкой последовательности  $a_n$  тогда и только тогда, когда существует подпоследовательность последовательности  $a_n$ , сходящаяся к  $a$ .
21. Может ли сходящаяся последовательность не иметь ни наибольшего, ни наименьшего члена?
22. Бесконечно большие последовательности. Приведите пример последовательности: а) не стремящейся ни к  $+\infty$ , ни к  $-\infty$ , но являющейся бесконечно большой; б) неограниченной, но не бесконечно большой.
23. Докажите, что последовательность  $x_n$ , не содержащая нулевых членов, является бесконечно большой тогда и только тогда, когда последовательность  $\frac{1}{x_n}$  является бесконечно малой.
24. Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n}$ .
25. Докажите, что следующие последовательности бесконечно малы:
  - а)  $\left(\frac{n}{2^n}\right)$ ; б)  $\left(\frac{a^n}{n!}\right)$  при всех  $a > 0$  (*факториал растет быстрее геометрической прогрессии*);
  - в)  $\left(\frac{n^k}{a^n}\right)$  при всех  $k \in \mathbb{N}$  и  $a > 1$  (*геометрическая прогрессия растет быстрее любой степени*).
26. Пусть для почти всех  $n$   $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ . а) Обязательно ли последовательность  $a_n$  сходится? б) Может ли последовательность  $a_n$  иметь предел, отличный от нуля?
27. Вычислите: а)  $\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots}}}$ ; б)  $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \dots}}}$ .
28. Последовательность задана рекуррентным соотношением. Докажите, что она имеет предел, и найдите его.
  - а)  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ ,  $x_1 = a > 1$ . б)  $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$ .
29. Последовательность задана рекуррентным соотношением:  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ . Ограничена ли она?
30. Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10}$ .