

## Первый зачет по теме "Предел функции"

1. Определения предела функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  и в точке. Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при  $x \rightarrow +\infty$ . Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов в точке.
2. Определение бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$  функции. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  тогда и только тогда, когда  $f(x) = b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно мала при  $x \rightarrow +\infty$ . Докажите, что сумма бесконечно малых на бесконечности функций бесконечно мала.
3. Определение бесконечно малой в данной точке функции. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  тогда и только тогда, когда  $f(x) = b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно мала при  $x \rightarrow a$ . Докажите, что сумма бесконечно малых в данной точке функций бесконечно мала.
4. Докажите, что произведение бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$  и ограниченной на  $\mathbb{R}$  функций — бесконечно малая функция. Докажите, что произведение бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  и ограниченной вблизи точки  $a$  функций — бесконечно малая в точке  $a$  функция.
5. Определение бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$  функции. Докажите, что функция  $f(x)$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$  тогда и только тогда, когда функция  $\frac{1}{f(x)}$  бесконечно мала при  $x \rightarrow +\infty$ . Определение функции, бесконечно большой в точке  $a$ . Докажите, что функция  $f(x)$  является бесконечно большой в точке  $a$  тогда и только тогда, когда функция  $\frac{1}{f(x)}$  бесконечно мала в точке  $a$ .
6. Докажите теоремы о пределе суммы и о пределе произведения функции при  $x \rightarrow +\infty$  и в точке  $a$ .
7. Докажите теорему о пределе частного функции при  $x \rightarrow +\infty$ .
8. Докажите теорему о пределе частного функции в точке  $a$ .
9. Докажите, что сумма бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный предел, является бесконечно большой функцией. Рассмотрите случаи  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow a$ .
10. Докажите, что предел произведения бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$  функции и функции, имеющей при  $x \rightarrow +\infty$  конечный ненулевой предел — бесконечно большая при  $x \rightarrow +\infty$  функция. Докажите, что многочлен ненулевой степени — бесконечно большая функция.
11. Что можно сказать о пределах при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  рациональной функции (частного двух многочленов) в зависимости от степеней числителя и знаменателя?
12. Односторонние пределы. Докажите, что если функция  $f(x)$  не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) на луче  $(a; +\infty)$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Докажите, что функция, монотонная на интервале  $(a; b)$ , имеет в каждой точке этого интервала предел как слева, так и справа.
13. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  бесконечно большие при  $x \rightarrow +\infty$ . Покажите на примерах, что функция  $f(x) + g(x)$  может иметь любой конечный предел, быть бесконечно большой или не иметь предела (но и не быть бесконечно большой).
14. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  бесконечно малы при  $x \rightarrow +\infty$ . Покажите на примерах, что функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  может иметь любой конечный предел, быть бесконечно большой или не иметь предела (но и не быть бесконечно большой).
15. Пусть функция  $f(x)$  бесконечно большая при  $x \rightarrow +\infty$ , а  $g(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow +\infty$ . Покажите на примерах, что функция  $f(x)g(x)$  может иметь любой конечный предел, быть бесконечно большой или не иметь предела (но и не быть бесконечно большой).