

Параллельность в пространстве**Параллельность прямой и плоскости**

Определение. **Прямая и плоскость**, не имеющие общих точек, называются **параллельными**.

Существование параллельных прямой и плоскости доказывается в следующей задаче.

Признак параллельности прямой и плоскости. *Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то эта прямая и плоскость параллельны.*

31. а) Через точку, не лежащую в данной плоскости, проведите прямую, параллельную данной плоскости. Сколько решений имеет задача?

б) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проведите плоскость, параллельную данной прямой. Сколько решений имеет задача?

Теорема о линии пересечения. *Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

Следствие 1. *Если через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость, причем эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.*

Следствие 2 (теорема о транзитивности параллельности прямых). *Если прямая a параллельна прямой b , а прямая b параллельна прямой c , то прямая a параллельна прямой c .*

Следствие 3. *Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.*

32. В плоскости MBC проведите через точку B_1 прямые, параллельные плоскостям MCD и MAD .

33. Постройте сечение пирамиды, проходящее через точки P и Q и параллельное прямой AB .

34. Дан тетраэдр $DABC$. CM и BN – медианы основания ABC . Точки P и K делят отрезки AD и BN в отношениях $AP : PD = 1 : 3$, $BK : KN = 1 : 2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и K и параллельной прямой CM . Определите, в каком отношении делит оно ребро DC .

Параллельность плоскостей

Определение. **Две плоскости**, не имеющие общих точек, называются **параллельными**.

Признак параллельности плоскостей. *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Свойства параллельных плоскостей

Свойство 1. *Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей параллельны.*

Свойство 2. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны по длине.*

Свойство 3 (транзитивность параллельных плоскостей). *Если плоскость α параллельна плоскости β , а плоскость β параллельна плоскости γ , то плоскость α параллельна плоскости γ .*

35. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите плоскость, параллельную этой плоскости. Сколько решений имеет задача?

36. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проведите плоскость так, чтобы эти плоскости были параллельны. Сколько решений имеет задача?

37. Проведите через скрещивающиеся медианы граней тетраэдра два параллельных сечения. Сколько случаев надо рассмотреть?

38. Даны скрещивающиеся прямые a и b и не принадлежащая им точка C . Постройте прямую, проходящую через точку C и пересекающую прямые a и b . Сколько решений может иметь задача?

39. Докажите, что три параллельные плоскости отсекают на любых двух пересекающихся этих плоскостей прямых пропорциональные отрезки.

Домашнее задание

40. На ребрах тетраэдра $ABCD$ отмечены точки, делящие их в следующих отношениях: $AP : PD = DQ : QB = 2 : 1$, $AM : MC = 2 : 3$. Постройте сечение тетраэдра, проходящее через прямую PQ и параллельное прямой BM , и найдите, в каком отношении оно делит ребро BC .

41. Основанием пирамиды является параллелограмм $ABCD$. Постройте сечение, содержащее его диагональ BD и параллельное боковому ребру SA . Определите, в каком отношении оно делит боковые ребра SB , SC и SD .

42. а) Верно ли, что через любую точку, принадлежащую ребру тетраэдра, можно провести сечение, являющееся параллелограммом?

б) Верно ли, что у любого тетраэдра существует сечение, являющееся ромбом? Сколько их может быть?

в) Скрещивающиеся ребра тетраэдра имеют длины a и b . Сечение тетраэдра, параллельное этим ребрам, является ромбом. В каком отношении плоскость сечения тетраэдра делит его ребра, которые она пересекает?

г) Верно ли, что у любой четырехугольной пирамиды существует сечение, являющееся параллелограммом?

43. Верно ли, что две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда всякая прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую?

44. В пространстве даны три попарно скрещивающиеся прямые. Постройте прямую, пересекающую каждую из них. Сколько решений имеет задача?

Призма, параллелепипед и его виды, усеченная пирамида

Определение. **Призма** – это многогранник, две грани которого – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а все ребра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны между собой.

Два равных многоугольника, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы. Остальные грани называются **боковыми**, а их объединение – **боковой поверхностью** призмы. Ребра, не лежащие в основании призмы, называются ее **боковыми ребрами**.

45. Докажите, что боковые грани призмы являются параллелограммами.

Определение. **Параллелепипед** – это призма, основаниями которой служат параллелограммы.

Свойства параллелепипеда

Свойство 1. Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

Свойство 2. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Определение. **Параллелепипед**, все грани которого являются прямоугольниками, называется **прямоугольным**.

Определение. **Параллелепипед**, все грани которого являются квадратами, называется **кубом**.

Определение. **Усеченной пирамидой** называется часть пирамиды, заключенная между плоскостью основания и плоскостью, параллельной плоскости основания и пересекающей все боковые ребра пирамиды.

Основание исходной пирамиды и многоугольник, полученный при пересечении ее плоскостью, указанной в определении, называются **основаниями** усеченной пирамиды. Остальные ее грани называются **боковыми**.

46. Постройте сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, проходящей через точки K, L и M , где точки K и L принадлежат плоскости ABC , а точка M – плоскости $A_1B_1C_1$.

47. На ребрах AD и C_1D_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ отмечены такие точки P и Q , что $C_1P : PD_1 = DQ : AQ = 1 : 2$. Точка M – середина ребра BC . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую AM параллельно прямой PQ , определите его вид и найдите, в каких отношениях оно делит ребра куба.

48. Через скрещивающиеся диагонали боковых граней треугольной призмы проведите параллельные сечения. В каком отношении делят они ребра основания?

49. Длина ребра куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ равна a . На ребрах AD и B_1C_1 взяты соответственно точки M и Q , а на ребре CD – точки P и N так, что $AM = C_1Q = CP = DN = 1/3a$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через прямую MP параллельно прямой NQ , и найдите его площадь.

50. Точки M, N, P – середины ребер AB, CD и BC тетраэдра $ABCD$. Через точку P проведите плоскость, параллельную прямым DM и AN . В каком отношении она делит ребро AD ?

Домашнее задание

51. Пусть A, B, C, D – четыре точки, не лежащие в одной плоскости. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC, ABD и BCD , делит отрезок BD ?

52. Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Точка K – середина ребра B_1C_1 , точка N принадлежит лучу CB , причем $NC : BC = 3 : 2$. Постройте сечение куба плоскостью DNK и найдите, в каком отношении делит она ребро D_1C_1 .

53. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 . Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1 ?

Продолжаем выяснять отношения*Это должен знать каждый*

54. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что диагональ BD_1 проходит через точки пересечения медиан треугольников AB_1C и A_1C_1D и делится ими на три равные части.
55. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке. В каком отношении они делятся этой точкой?
56. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке. В каком отношении делятся они точкой пересечения?

Где точка?

57. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром длины 1. Точка P – середина ребра A_1D_1 , точка Q делит отрезок AB_1 в отношении $2 : 1$, считая от вершины A , R – точка пересечения отрезков BC_1 и B_1C . Постройте сечение куба плоскостью PQR . Найдите периметр сечения и отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ AC_1 куба.
58. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC . Точки P, Q, R взяты на медианах SP_1, SQ_1 и SR_1 граней SAB, SBC и SCA соответственно так, что $SP : PP_1 = 2 : 1, SQ : QQ_1 = 2 : 3$, а R – середина отрезка SR_1 . Постройте сечение пирамиды плоскостью PQR и определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро SB .

Домашнее задание

59. Сечение куба проходит середины трех его скрещивающихся ребер. Найдите площадь сечения, если ребро куба имеет длину a .
60. Какие многоугольники могут быть сечениями куба? Какие правильные многоугольники могут быть сечениями куба?
61. Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью MNK , если точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 2$, точка N делит ребро BB_1 в отношении $BM : MB_1 = 1 : 3$, точка K делит ребро CD в отношении $CK : KD = 1 : 4$. Определите, в каких отношениях секущая плоскость делит другие ребра параллелепипеда.
62. Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью KLM , если точка K принадлежит грани AA_1B_1B , точка L – грани BB_1C_1C , точка M – грани AA_1C_1C .
63. Точки O и O_1 – центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На отрезке OO_1 взята точка S так, что $O_1S : OS = 1 : 3$. Через эту точку проведено сечение куба, параллельное его диагонали AC_1 и диагонали BD основания. Найдите площадь сечения, если длина ребра куба равна a .
64. На ребрах DC и D_1C_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены такие точки Q и R , что $D_1R : RC_1 = CQ : QD = 3 : 2$, точка P делит диагональ AD_1 в отношении $AP : PD_1 = 1 : 3$. Постройте сечение куба плоскостью PQR , определите его вид и найдите, в каком отношении делит оно площадь грани $A_1B_1C_1D_1$.
65. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точки K, M, N – середины ребер AD, AB и BC соответственно. Точка P делит отрезок SK в отношении $SP : PK = 2 : 1$, точка Q делит отрезок SM в отношении $SQ : QM = 4 : 7$, а точка R – середина отрезка SN . В каком отношении плоскость PQR делит ребра пирамиды, которые она пересекает?