Последовательности-2

13.09.10

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для *почти всех* членов последовательности, если оно не выполняется лишь для конечного числа членов последовательности.

1. Существует ли такая последовательность целых чисел, что для любого целого числа N верно утверждение: "почти все члены последовательности делятся на N"?

Последовательность называется *возрастающей*, если $\forall n\ a_{n+1} > a_n$. Аналогично определяется *убывающая* последовательность. Последовательность$\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если $\forall n\ a_{n+1} \leqslant a_n$. Аналогично определяется *неубывающая* последовательность. Если из последовательности выбросить некоторые члены, сохранив порядок оставшихся, получится её *подпоследовательность*.

2. Доказать, что у любой бесконечной последовательности есть монотонная (невозрастающая или неубывающая) бесконечная подпоследовательность.

3. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любая другая последовательность целых чисел является её подпоследовательностью?

4. Последовательность $x_0, x_1, \dots$ такова, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$ при всех n. Может ли эта последовательность не быть ограниченной? Тот же вопрос, если $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.

Последовательности-2

13.09.10

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для *почти всех* членов последовательности, если оно не выполняется лишь для конечного числа членов последовательности.

1. Существует ли такая последовательность целых чисел, что для любого целого числа N верно утверждение: "почти все члены последовательности делятся на N"?

Последовательность называется *возрастающей*, если $\forall n\ a_{n+1} > a_n$. Аналогично определяется *убывающая* последовательность. Последовательность$\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если $\forall n\ a_{n+1} \leqslant a_n$. Аналогично определяется *неубывающая* последовательность. Если из последовательности выбросить некоторые члены, сохранив порядок оставшихся, получится её *подпоследовательность*.

2. Доказать, что у любой бесконечной последовательности есть монотонная (невозрастающая или неубывающая) бесконечная подпоследовательность.

3. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любая другая последовательность целых чисел является её подпоследовательностью?

4. Последовательность $x_0, x_1, \dots$ такова, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$ при всех n. Может ли эта последовательность не быть ограниченной? Тот же вопрос, если $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.

Последовательности-2

13.09.10

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для *почти всех* членов последовательности, если оно не выполняется лишь для конечного числа членов последовательности.

1. Существует ли такая последовательность целых чисел, что для любого целого числа N верно утверждение: "почти все члены последовательности делятся на N"?

Последовательность называется *возрастающей*, если $\forall n\ a_{n+1} > a_n$. Аналогично определяется *убывающая* последовательность. Последовательность$\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если $\forall n\ a_{n+1} \leqslant a_n$. Аналогично определяется *неубывающая* последовательность. Если из последовательности выбросить некоторые члены, сохранив порядок оставшихся, получится её *подпоследовательность*.

2. Доказать, что у любой бесконечной последовательности есть монотонная (невозрастающая или неубывающая) бесконечная подпоследовательность.

3. Существует ли такая последовательность целых чисел, что любая другая последовательность целых чисел является её подпоследовательностью?

4. Последовательность $x_0, x_1, \dots$ такова, что $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n}$ при всех n. Может ли эта последовательность не быть ограниченной? Тот же вопрос, если $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.
