Число e.

Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Зададимся вопросом о её сходимости. Заметим сперва, что эта последовательность монотонна. Действительно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1}\frac{(n+2)^n n^n}{(n+1)^{2n}} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n.$$

Последний сомножитель оценивается снизу при помощи неравенства Бернулли:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Последовательность a_n к тому же ещё и ограничена сверху. Действительно:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!n^k}.$$

Оценивая n^k снизу через $n(n-1)\dots(n-k+1)$, получаем:

$$a_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 1+2 = 3.$$

Мы доказали ограниченность и монотонность последовательности a_n. Значит, она сходится. Её предел обозначается e.

Ряд для числа e.

При доказательстве сходимости последовательности a_n у нас возникла последовательность $e_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Оказывается, она тоже сходится к e, причём гораздо быстрее, чем a_n. Чтобы это показать, рассмотрим вспомогательную последовательность $b_n = e_n - a_{n^2}$:

$$|b_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n^2} \frac{(n^2)!}{k!(n^2-k)!n^{2k}}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{(n^2)!}{(n^2-k)!n^{2k}}\right) + \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{(n^2)!}{k!(n^2-k)!n^{2k}}$$

В первом слагаемом оценим $\frac{(n^2)!}{(n^2-k)!}$ снизу через $(n^2-n)^k$, а во втором — сверху через n^{2k}. Тогда получим:

$$|b_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right) + \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!n}\left(1+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right) + \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k!}$$

Оценивая каждое слагаемое внутри $\left(1+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right)$ сверху единицей, получаем:

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}\right) + \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{3}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Оба слагаемых сходятся к 0, значит $|b_n| \to 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n^2} = e$.