Задача 1. Барометрическая формула.

Наша задача — определить, как зависит давление воздуха от высоты над уровнем моря. Мы будем действовать в предположении, что Земля плоская, массовая сила тяжести g постоянна, а все макроскопические параметры воздуха в фиксированной точке пространства не меняются с течением времени, причём давление p зависит только от вертикальной координаты y. Рассмотрим условия равновесия объёма воздуха V, заключённого в прямоугольный параллелепипед $a \times b \times c$, у которого нижняя грань параллельна Земле и имеет вертикальную координату h. Будем писать эти условия в проекции на вертикальную ось Y

$$p(h)ac - p(h+b)ac - F_g = 0.$$

$p(h)ac$ и $P(h+b)ac$ — силы давления на нижней и верхней гранях, соответственно. F_g — сила тяжести. Если бы плотность воздуха была постоянной, F_g равнялось бы $\rho g V$. В случае переменной (но непрерывно зависящей от координаты) плотности существует точка внутри объёма V такая, что для плотности ρ^* в этой точке выполнено $F_g = \rho^* g V$. Таким образом, уравнение равновесия можно переписать так

$$p(h)ac - p(h+b)ac - \rho^* g V = 0.$$

Заметим, что $V = abc$, поэтому

$$p(h) - p(h+b) - \rho^* g b = 0.$$

Будем считать, что макроскопические параметры воздуха связаны между собой уравнением состояния совершенного газа

$$p = \rho R T,$$

где R — постоянная, зависящая от состава газа, а T — температура, которую мы тоже будем считать постоянной (хотя такое допущение, вообще говоря, не слишком реалистично). Тогда мы можем вместо ρ^* написать $\frac{p(h^*)}{RT}$, где $h < h^* < h+b$. Уравнение равновесия примет вид

$$p(h) - p(h+b) - \frac{p(h^*)gb}{RT} = 0.$$

Нам будет удобно переписать это уравнение в виде

$$b = \frac{RT}{g}\left(\frac{p(h) - p(h+b)}{p(h^*)}\right).$$

Для дальнейшего вывода нам придётся предположить, что давление монотонно зависит от высоты (т.е. что $p(h^*)$ находится между $p(h)$ и $p(h+b)$). Без этого предположения можно обойтись, но тогда нам потребуется более серьёзный математический аппарат (дифференциальное исчисление), который мы сейчас трогать не хотим. Рассмотрим два значения давления $p_a < p_b$. Рассмотрим произвольное разбиение σ отрезка $[p_a, p_b]$ $p_a = p_0 < p_1 < \ldots < p_n = p_b$ диаметра $d(\sigma)$. Для каждого из подотрезков разбиения запишем уравнение равновесия, записывая вместо b разность высот, соответствующих давлениям p_i и p_{i+1}. Сложив все уравнения, получим

$$h_b - h_a = h_n - h_0 = \frac{RT}{g}\left(\frac{p(h_0) - p(h_1)}{p(h^*_{01})} + \frac{p(h_2) - p(h_1)}{p(h^*_{12})} + \ldots + \frac{p(h_n) - p(h_{n-1})}{p(h^*_{(n-1)n})}\right).$$

Заменим в правой части этого уравнения все $p(h^*_{ij})$ на $p(h_i)$. Значение полученного выражения обозначим $A(\sigma)$. Аналогично, значение правой части после замены всех $p(h^*_{ij})$ на $p(h_j)$ обозначим $B(\sigma)$. Нетрудно заметить, что числа $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ ограничивают с двух сторон площадь под гиперболой $y = \frac{RT}{gx}$ при $p_a < x < p_b$. При этом, воспользовавшись неравенством $p(h_i) - p(h_{i+1}) \leqslant d(\sigma)$ легко получить

$$B(\sigma) - A(\sigma) \leqslant d(\sigma)\left(\frac{RT}{gp_a} - \frac{RT}{gp_b}\right).$$

Поскольку для любого σ значение $(h_b - h_a)$ заключено в пределах от $A(\sigma)$ до $B(\sigma)$ и площадь под участком гиперболы (равная, как мы знаем, $\frac{RT}{g}\ln\frac{p_a}{p_b}$) заключена в тех же пределах, а последовательность разбиений с $d(\sigma_n) \to 0$ даёт последовательность стягивающихся отрезков с концами $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$, то

$$h_b - h_a = \frac{RT}{g}\ln\frac{p_a}{p_b}.$$

Потенцируя это равенство, получаем

$$p_a = p_b e^{\frac{g(h_b - h_a)}{RT}}.$$

Это равенство, связывающее между собой давления на высотах h_a и h_b, называется *барометрической формулой.*

Задача 2. Задача о верёвке.

Тонкая нерастяжимая верёвка намотана на цилиндр. С одного конца за верёвку тянут с силой T_1, с другого — с силой $T_2 > T_1$. Найти максимальное значение T_2, при котором система остаётся в равновесии, если коэффициент трения верёвки о цилиндр равен k.

Введём на верёвке угловую координату φ, задающую положение точки верёвки на цилиндре, а именно: точка верёвки с координатой φ повёрнута на угол $\varphi \bmod 2\pi$ от некоторой отсчётной точки на цилиндре относительно оси цилиндра. Через $T(\varphi)$ обозначим силу натяжения верёвки в точке φ.

Запишем уравнения равновесия участка верёвки $[\varphi_0 - \alpha, \varphi_0 + \alpha]$ в проекции на оси координат, одна из которых направлена по радиусу цилиндра к точке φ_0, а другая — по касательной к его поверхности. В проекции на радиальную ось имеем

$$R_r + F_r - (T(\varphi_0 + \alpha) + T(\varphi_0 - \alpha))\sin\alpha = 0,$$

где R_r — суммарная радиальная составляющая сил реакции опоры, а F_r — суммарная радиальная составляющая сил трения. В проекции на тангенциальную ось уравнение равновесия выглядит так

$$R_t + F_t + (T(\varphi_0 + \alpha) - T(\varphi_0 - \alpha))\cos\alpha = 0,$$

где R_t и F_t — тангенциальные составляющие сил реакции опоры и сил трения.

Заметим теперь, что по закону сухого трения $F \leqslant kR$. Будем рассматривать критическое значение силы трения покоя, а именно $F = kR$. При этом $F_t = kR_r$ и $F_r = kR_t$. Пусть $r(\varphi)$ — угловая плотность распределения силы реакции опоры. Тогда $F_r \leqslant 2\alpha \max r \sin\alpha$. Подставим во второе уравнение R_r из первого

$$k(T(\varphi_0 + \alpha) + T(\varphi_0 - \alpha))\sin\alpha - kF_r + R_t + (T(\varphi_0 + \alpha) - T(\varphi_0 - \alpha))\cos\alpha = 0.$$

$T(\varphi_0+\alpha)+T(\varphi_0-\alpha)$ перепишем как $2T(\varphi^*)$ — удвоенное значение силы натяжения в некоторой промежуточной точке. Умножая уравнение на $\frac{2\alpha}{T(\varphi^*)\sin\alpha}$, получаем

$$2k\alpha = \frac{T(\varphi_0+\alpha)-T(\varphi_0-\alpha)}{T(\varphi^*)}\cdot\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\alpha(k^2-1)R_t}{T(\varphi^*)\sin\alpha}.$$

Имеем уравнение, похожее на то, что получилось в предыдущей задаче. Действуем дальше таким же образом: разбиваем отрезок $[T_1, T_2]$ и рассматриваем гиперболу $y=\frac{1}{kx}$. Заметим, что $\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$ отличается от 1 на величину порядка α^2, R_t отличается от 0 на величину порядка α^2, поэтому при стремлении диаметра разбиения к 0 суммы величин $1-\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и R_t будут тоже стремиться к 0 (т.к. эти суммы при равномерном разбиении имеют порядок α). Таким образом получаем, что

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{1}{k}\ln\frac{T_2}{T_1},$$

или

$$T_2=T_1e^{k(\varphi_2-\varphi_1)}.$$