

Программа зачёта.

- 1) Уравнение Пелля. Тождество Брахмагупты, умножение решений. Структура множества решений уравнения Пелля.
- 2) Неравенство Бернулли. Ограниченные последовательности. Покоординатные сумма, разность, произведение и частное ограниченных последовательностей. Неограниченность последовательности частичных сумм гармонического ряда. Кормушки и ловушки последовательностей. Доказать, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся её кормушкой, а для любой монотонной существует отрезок длины 1, являющийся её ловушкой. Привести пример последовательности, для которой любой интервал является ловушкой.
- 3) Предел последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Сходимость неубывающей ограниченной сверху последовательности. Существование монотонной подпоследовательности у любой последовательности. Существование сходящейся подпоследовательности у любой ограниченной последовательности.
- 4) Полнота множества действительных чисел. Принцип вложенных отрезков (последовательность вложенных отрезков имеет точку, общую для всех отрезков последовательности). Доказать, что последовательность стягивающихся отрезков имеет ровно одну общую точку. Существование и единственность корня любого натурального числа.
- 5) Кривые на плоскости и в пространстве. Параметризация кривой. Эквивалентные кривые. Вариация кривой, аддитивность вариации, независимость вариации от выбора параметризации. Непрерывность. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. Вариация непрерывной кривой.
- 6) Предел последовательности $a_n = P(n)/Q(n)$, где P и Q — многочлены. Задача про улитку, шагающую попеременно вверх и вправо одинаковыми шагами. Предел последовательности $b_n = x^n$, где $x > 0$. Задача про сумасшедшего туриста. Построение касательной (понимаемой как поточечный предел секущих) к параболе.
- 7) Подстановки и самосовмещения. Самосовмещения многоугольников как подстановки множества их вершин. Самосовмещения правильного треугольника, квадрата, правильного пятиугольника. Доказать, что если фиксировано самосовмещение f некоторой геометрической фигуры, переводящее точку X в точку Y , то любое самосовмещение этой фигуры, переводящее X в Y , представляется в виде $f \circ g$, где g — самосовмещение, оставляющее X на месте, причём такое представление единственно.

Программа зачёта.

- 1) Уравнение Пелля. Тождество Брахмагупты, умножение решений. Структура множества решений уравнения Пелля.
- 2) Неравенство Бернулли. Ограниченные последовательности. Покоординатные сумма, разность, произведение и частное ограниченных последовательностей. Неограниченность последовательности частичных сумм гармонического ряда. Кормушки и ловушки последовательностей. Доказать, что для любой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся её кормушкой, а для любой монотонной существует отрезок длины 1, являющийся её ловушкой. Привести пример последовательности, для которой любой интервал является ловушкой.
- 3) Предел последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Сходимость неубывающей ограниченной сверху последовательности. Существование монотонной подпоследовательности у любой последовательности. Существование сходящейся подпоследовательности у любой ограниченной последовательности.
- 4) Полнота множества действительных чисел. Принцип вложенных отрезков (последовательность вложенных отрезков имеет точку, общую для всех отрезков последовательности). Доказать, что последовательность стягивающихся отрезков имеет ровно одну общую точку. Существование и единственность корня любого натурального числа.
- 5) Кривые на плоскости и в пространстве. Параметризация кривой. Эквивалентные кривые. Вариация кривой, аддитивность вариации, независимость вариации от выбора параметризации. Непрерывность. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. Вариация непрерывной кривой.
- 6) Предел последовательности $a_n = P(n)/Q(n)$, где P и Q — многочлены. Задача про улитку, шагающую попеременно вверх и вправо одинаковыми шагами. Предел последовательности $b_n = x^n$, где $x > 0$. Задача про сумасшедшего туриста. Построение касательной (понимаемой как поточечный предел секущих) к параболе.
- 7) Подстановки и самосовмещения. Самосовмещения многоугольников как подстановки множества их вершин. Самосовмещения правильного треугольника, квадрата, правильного пятиугольника. Доказать, что если фиксировано самосовмещение f некоторой геометрической фигуры, переводящее точку X в точку Y , то любое самосовмещение этой фигуры, переводящее X в Y , представляется в виде $f \circ g$, где g — самосовмещение, оставляющее X на месте, причём такое представление единственно.