Нормальные подгруппы и факторгруппы.

Напоминание

Определение. Отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для любых $a, b \in G_1$.

Определение. *Ядром* гомоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ называется множество $Ker\varphi$ элементов $g \in G_1$, таких что $\varphi(g) = e$, то есть прообраз нуля.

Определение. *Образом* гомоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ называется множество $Im\varphi$ элементов $g \in G_2$, таких что существует $h \in G_1 : \varphi(h) = g$, то есть множество элементов в которые хоть что-то перешло.

Лемма. Ядро и образ гомоморфизма являются подгруппами в соответствующих группах

Определение. Подгруппа H группы G называется *нормальной подгруппой* или *нормальным делителем* группы G, если существуют такие группа G' и гомоморфизм $\varphi : G \to G'$, что $H = Ker\varphi$. Обозначается так: $H \lhd G$.

Определение. Группа K называется факторгруппой группы G по подгруппе H и обозначается G/H, если существуют такие группа G' и гомоморфизм $\varphi : G \to G'$, что K равна или изоморфна $Im\varphi$.

Теорема. Определения нормальной группы и фактор группы корректны.

Лемма. Следующие утверждения эквивалентны:

1) H — нормальная подгруппа группы G

2) gHg^{-1} и H равны как множества для любого $g \in G$

3) gH и Hg равны как множества для любого $g \in G$ (другими словами, правые и левые смежные классы совпадают)

Задачи

Задача 1. Придумайте два разных гомоморфизма из $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8$, не переводящих всё в ноль. Какие у каждого из них ядро и образ?

Задача 2. Постройте гомоморфизм

а) из группы самосовмещений правильного шестиугольника в группу самосовмещений правильного треугольника,

б) из группы самосовмещений куба в группу самосовмещений тетраэдра.

Задача 3. Существуют ли нормальные и ненормальные собственные подгруппы в $\mathbb{Q}_+$? в $\mathbb{Z}$? в $\mathbb{Z}_n$? (собственными называются подгруппы не совпадающие со всей группой и с единицей)

Задача 4. Пусть даны группа G и некоторая её подгруппа H. Докажите, что если $|G|/|H| = 2$, то $H \lhd G$. (модуль группы |K| — это, по определению, количество элементов в ней)

Подсказка: посмотрите, как выглядят правые и левые смежные классы по подгруппе H.

Задача 5. Пусть $G := D_4$ — группа самосовмещений квадрата, H — её подгруппа, содержащая симметрии относительно диагоналей квадрата, центральную симметрию и тождественное отображение, а K — её подгруппа, содержащая только симметрию относительно одной из диагоналей квадрата и тождественное отображение. Правда ли, что $K \lhd H \lhd G$? А что $K \lhd G$?

Задача 6. Докажите, что коммутант является нормальным делителем, а факторгруппа по коммутанту абелева.

Подсказка 1: по определению коммутанта любой его элемент имеет вид $aba^{-1}b^{-1}$ или $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$.

Подсказка 2: выпишите, что дано, и что требуется доказать.

Подсказка 3: $g^{-1}g = e$.

Задача 7. Чему изоморфна $\mathbb{Z}_{15}/\mathbb{Z}_5$?

Задача 8. Рассмотрим группу поворотов квадрата и группу симметрий ромба. Сколько в каждой из них элементов? Изоморфны ли они? Изоморфна ли D_4/H хотя бы одной из них, где D_4 — группа самосовмещений квадрата, а H — её подгруппа, содержащая центральную симметрию и тождественное преобразование?

Подсказка: постройте отображение, ядром которого будет H.